Práctica 3: Integral de Lebesgue

"It strikes me that mathematical writing is similar to using a language. To be understood you have to follow some grammatical rules. However, in our case, nobody has taken the trouble of writing down the grammar; we get it as a baby does from parents, by imitation of others. Some mathematicians have a good ear; some not (and some prefer the slangy expressions such as 'iff'). That's life."
Jean-Pierre Serre.

Ejercicio 1. Sea f definida sobre $\mathbb{R}^n$, medible y no negativa. Probar que si E es medible entonces

$$\int_E f = \sup\left\{\int_E \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq f, \quad \varphi \text{ simple}\right\}.$$

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible, $v \in \mathbb{R}^n$ y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible.

(a) Probar que si $f \geq 0$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Concluir que

$$\int_E f(x+v)dx = \int_{E+v} f(x)dx.$$

(b) Si f es integrable sobre $\mathbb{R}^n$, valen para f las mismas afirmaciones.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Probar que para todo $a > 0$ vale

$$\int_{R^n} f\left(\frac{x}{a}\right)\, dx \quad = \quad a^n \int_{R^n} f(x)dx.$$

Ejercicio 4. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ integrable. Probar que si $\left|\int_E f dx\right| = \int_E |f| dx$, entonces $f \geq 0$ a.e. en E ó $f \leq 0$ a.e. en E.

Ejercicio 5. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible tal que $\int_A f dx = 0$ para todo conjunto medible $A \subseteq E$. Probar que $f = 0$ a.e. en E.

Ejercicio 6. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea f integrable sobre E. Probar que si $\int_E |f_n - f| dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$, entonces $f_n \overset{m}{\to} f$ sobre E. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 7.

(a) Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrable. Probar que existe $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{ y } \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

(b) Mostrar que existe g integrable sobre $[0,+\infty)$, continua y tal que para una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$, se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \infty.$$

Ejercicio 8. Sea f integrable sobre $\mathbb{R}^n$ y $Q_k = [-k,k]^n$, $k \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\int_{Q_k^c} |f| dx \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Ejercicio 9.

(a) Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n$ conjuntos medibles contenidos en el intervalo $[0,1]$. Si para cada $x \in [0,1]$, el conjunto $A_x = \{k : 1 \leq k \leq n \text{ y } x \in E_k\}$ tiene por lo menos q elementos, probar que existe k tal que $1 \leq k \leq n$ y $|E_k| \geq \frac{q}{n}$.

(b) Sea $(E_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos medibles de $\mathbb{R}^m$ y $k \in \mathbb{N}$. Probar que si $G = \{x \in \mathbb{R}^m : x \in E_n \text{ para al menos } k \text{ valores de } n\}$, entonces G es medible y $k|G| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$.

Ejercicio 10. Mostrar que en el Lema de Fatou la desigualdad puede ser estricta.

Ejercicio 11. Mostrar que en el Lema de Fatou, la hipótesis de que las funciones de la sucesión sean no negativas, es necesaria.

Ejercicio 12. Sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas sobre E. Si $\lim_{n\to\infty} f_k(x) = f(x)$ para cada $x \in E$ y $f_k \leq f$ a.e., probar que

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_k.$$

Ejercicio 13.

(a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión decreciente de funciones medibles y no negativas sobre E con $f_1 \in L^1(E)$. Mostrar que

$$\int_E \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k < \infty.$$

(b) Sea $x \in \mathbb{R}_{>1}$ mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln x$$

considerando la función $f_n(t) = t^{\frac{1}{n}-1}$ para $1 < t < x$.

Ejercicio 14. Si $f \in L^1(0,1)$, mostrar que $x^n f(x) \in L^1(0,1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\int_0^1 x^n f(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Ejercicio 15. Mostrar que el Teorema de Convergencia Mayorada es válido para funciones a valores complejos.

Ejercicio 16. Usar el Teorema de Egorov para probar el Teorema de Convergencia Mayorada.

Ejercicio 17. Probar que para cada $g \in L^1([0,\infty))$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n xg(x)dx = 0.$$

Ejercicio 18. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles sobre $\mathbb{R}^m$ y g integrable sobre $\mathbb{R}^m$ tales que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea f una función tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ a.e. Probar que para todo $a > 0$, si llamamos $E_k = \bigcup\limits_{n\geq k} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq a\}$ para $k \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} |E_k| = 0$. Deducir que $f_n \overset{m}{\to} f$.

Ejercicio 19. Sea $g(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, definida en $(0,1)$ y f su derivada. Probar que f es continua en $(0,1)$, existe $\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 f(x)dx$, pero $f \notin L^1(0,1)$.

Ejercicio 20. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre $E \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n|dx < \infty,$$

Probar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente en casi todo punto de E y

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n dx.$$

Ejercicio 21. Sean $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}; f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$. Probar que

$$\int_{(0,1)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n.$$

Verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} |f_n| = \infty.$$

Ejercicio 22. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $E_n = \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$.

(a) Probar que si f integrable sobre E, entonces $\sum_{n\geq 1} |E_n| < \infty$.

(b) Probar que si E es de medida finita y $\sum_{n\geq 1} |E_n| < \infty$ entonces f es integrable sobre E.

Ejercicio 23. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ medible, $g(x) \geq 0$ para casi todo $x \in [0,1]$ e integrable sobre $[0,1]$. Probar que si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale la igualdad

$$\int_0^1 g(x)^n dx = \alpha,$$

entonces $g = \chi_E$ a. e. para algún conjunto $E \subseteq [0,1]$ medible.

Ejercicio 24. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre E y f medible tales que $f_n \overset{m}{\to} f$ sobre E. Si existe g integrable sobre E tal que $|f_n| \leq g$ sobre E, entonces f es integrable y $\int_E |f_n - f| dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Ejercicio 25. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que:

1. para todo $x \in [0,1]$, la función $y \mapsto f(x,y)$ es integrable sobre $[0,1]$ y
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es una función de (x,y) acotada.

Probar que

(a) para todo $x \in [0,1]$, la función $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es medible y

(b) $\frac{d}{dx} \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$.