

PRÁCTICA 1: MEDIDA DE LEBESGUE

---

*"To many, mathematics is a collection of theorems. For me, mathematics is a collection of examples; a theorem is a statement about a collection of examples and the purpose of proving theorems is to classify and explain the examples."*

JOHN B. CONWAY.

---

**Ejercicio 1.** Dado  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , probar que existe  $H \supseteq A$  de tipo  $G_\delta$  tal que  $|A|_e = |H|_e$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  tales que  $d(A, B) > 0$ . Probar que  $|A \cup B|_e = |A|_e + |B|_e$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $E \subseteq A$  con  $|A| = 0$ . Probar que  $E$  es medible y que  $|E| = 0$ . Deducir que el cardinal de los medibles es  $2^c$ . ¿Cuál es el cardinal de los no medibles?

**Ejercicio 4.** Sea  $E = \{x \in (0, 1) / \text{ en el desarrollo decimal de } x \text{ no aparece el dígito } 7\}$ . Probar que  $E$  tiene medida 0.

**Ejercicio 5.**

- (a) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Probar que el gráfico de  $f$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  de medida cero.
- (b) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Probar que su gráfico tiene medida cero.
- (c) ¿Y si  $f$  tiene finitas discontinuidades?

**Ejercicio 6.** Sea  $Z \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $|Z| = 0$ . Probar que  $E = \{x^2 : x \in Z\}$  tiene medida nula.

**Ejercicio 7.** Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  medible y tal que  $E = A \cup B$ , donde  $|B| = 0$ . Probar que  $A$  es medible.

**Ejercicio 8.** Sean  $v \in \mathbb{R}^n$  y  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $T(x) = x + v$ . Probar que

- (a)  $|T(E)|_e = |E|_e$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- (b) Si  $E$  es medible entonces  $T(E)$  es medible y  $|T(E)| = |E|$ .

**Ejercicio 9.** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ . Definimos  $rA = \{r \cdot a : a \in A\}$ . Probar que

- (a)  $|rA|_e = r^n |A|_e$ .
- (b) Si  $A$  es medible entonces  $rA$  es medible y  $|rA| = r^n |A|$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ .

- (a) Suponiendo conocida  $|B(0, 1)|$ , calcular  $|B(0, r)|$ .
- (b) Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  medible. Probar que  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:  $f(r) = |A \cap B(0, r)|$  es continua.
- (c) Si  $A$  es medible, para cada  $s : 0 \leq s \leq |A|$ , existe  $B \subseteq A$  medible tal que  $|B| = s$ .
- (d) Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  medible y tal que  $0 < |A| < \infty$ . Probar que dado  $n \in \mathbb{N}$ , existen  $n$  subconjuntos disjuntos de  $A$ ,  $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$ , tales que  $|A_j| = |A|/n$ , para cada  $1 \leq j \leq n$ .

**Ejercicio 11.** Sea  $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Probar que si  $E \subseteq [0, 1)$  es medible entonces  $T^{-1}(E)$  es medible y  $|T^{-1}(E)| = |E|$ .

**Ejercicio 12.** Para cada sucesión de conjuntos medibles  $(A_n)_{n \geq 1}$  definimos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Probar que

- (a)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$  y  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$  son medibles.
- (b)  $|\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |A_n|$ .
- (c) Si para algún  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k| < \infty$  entonces  $|\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n| \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} |A_n|$ .
- (d) Si  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$ , entonces  $|\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n| = 0$ .

**Ejercicio 13.** Construir un subconjunto de  $[0, 1]$  como el conjunto de Cantor excepto que en el  $k$ -ésimo paso, cada intervalo que se extrae tiene longitud  $\delta 3^{-k}$ ,  $0 < \delta < 1$ . Probar que el conjunto obtenido es perfecto, tiene medida  $1 - \delta$  y no contiene intervalos.

**Ejercicio 14.** Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

- (a)  $E$  es medible.
- (b) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $F \subseteq E$  cerrado tal que  $|E \setminus F|_e < \varepsilon$ .
- (c) Existen  $H$  de clase  $F_\sigma$  y  $N$  de medida 0 tales que  $E = H \cup N$ .

**Ejercicio 15.** Decimos que el conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  satisface la *condición de Carathéodory* si para todo  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  se verifica

$$(C) \quad |A|_e = |A \cap E|_e + |A \cap E^c|_e.$$

Probar que

- (a) Todo conjunto medible satisface (C).
- (b) Si  $E$  es acotado y satisface (C) entonces  $E$  es medible.
- (c)  $E$  es medible si y sólo si satisface (C).

**Ejercicio 16.**

- (a) Probar que si  $(E_k)_{k \geq 1}$  es una sucesión creciente de conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  entonces

$$\left| \bigcup_{k \geq 1} E_k \right|_e = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|_e.$$

- (b) Dar un ejemplo de una sucesión decreciente  $(E_k)_{k \geq 1}$  de conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $|E_k|_e < \infty$  para todo  $k$  y

$$\left| \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \right|_e < \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|_e.$$

**Ejercicio 17.** Para cada  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  definimos su medida interior

$$|E|_i = \sup\{|F| : E \supseteq F, F \text{ cerrado}\}.$$

Probar que

- (a)  $|E|_i \leq |E|_e$ .
- (b) Si  $E$  es medible entonces  $|E|_i = |E|_e$ .
- (c) Si  $|E|_e < \infty$  y  $|E|_i = |E|_e$ , entonces  $E$  es medible.
- (d) Existe  $E$  no medible tal que  $|E|_i = |E|_e$ .
- (e)  $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow |E_1|_i \leq |E_2|_i$ .
- (f) Si  $(E_j)_{j \geq 1}$  son disjuntos entonces  $\left| \bigcup_{j \geq 1} E_j \right|_i \geq \sum_{j \geq 1} |E_j|_i$ .

**Ejercicio 18.** Sea  $V$  un conjunto de Vitali. Probar que si  $E$  es medible y  $E \subseteq V$  entonces  $|E| = 0$ . Concluir que  $|V|_i = 0$ .

**Ejercicio 19.**

(a) Construir una sucesión de conjuntos  $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$  disjuntos dos a dos tales que

$$\left| \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right|_e < \sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k|_e.$$

(b) Construir una sucesión de conjuntos  $(E_j)_{j \geq 1}$  tal que  $\left| \bigcup_{j \geq 1} E_j \right|_i > \sum_{j \geq 1} |E_j|_i.$

(c) Construir  $E \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $|E|_i < \infty$  y  $|E|_e = \infty.$

**Ejercicio 20.** Sean  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  medible y  $A \subseteq E.$  Probar que

$$|E| = |A|_i + |E \setminus A|_e.$$

**Ejercicio 21.** Mostrar que existe un subconjunto  $H$  del intervalo  $[0, 1]$  de clase  $F_\sigma$  y de medida uno formado sólo por puntos irracionales.

**Ejercicio 22.** Probar que si  $E \subseteq \mathbb{R}$  es medible y  $|E| > 0$  entonces

$$D(E) = \{x - y : x, y \in E\}$$

contiene un entorno del origen.

**Ejercicio 23.** Probar que cualquier conjunto con medida positiva tiene cardinal  $c.$

**Ejercicio 24.** Sea  $E \subseteq \mathbb{R}$  medible que cumple la siguiente propiedad: si  $x \in E$  e  $y \in E$  entonces  $\frac{x+y}{2} \notin E.$  Probar que  $E$  tiene medida cero.