Análisis Funcional

Primer cuatrimestre de 2023

Segundo parcial

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
Nro. de libreta:

---

1. *a*) Sea W espacio de Banach tal que existen $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(W)$ operadores de rango finito, y para todo $x \in W$ se tiene $\lim_{n\to\infty} A_n x = x$.

   Probar que si V es Banach y $T : V \to W$ es compacto entonces T es límite de operadores de rango finito.

   b) Probar que si V es Banach y $1 \leq p < \infty$ entonces todo operador compacto $T : V \to \ell^p$ es límite de operadores de rango finito.

2. Sea E Banach y sea $A \in \mathcal{B}(E)$, $\sigma(A) \subset \Omega$ abierto conexo. Sea f holomorfa en Ω y sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) - \alpha$ no es idénticamente nula en Ω. Probar que

   a) Si $\alpha \in \sigma_p(f(A))$, entonces existe $\lambda \in \sigma_p(A)$ tal que $\alpha = f(\lambda)$ *(sug: usando que si los ceros de una función holomorfa se acumulan entonces es nula, achicando Ω se tiene $f(z) - \alpha = h(z)p(z)$ con h holomorfa no nula y p polinomomio.)*

   b) Si f no es constante, $f(\sigma_p(A)) = \sigma_p(f(A))$.

3. Sean E, F espacios de Banach, $A \in \mathcal{B}(E, F)$ acotado inferiormente, $K \in \mathcal{K}(E, F)$. Sean $T = A + K$, $\widetilde{T} : E/\ker(T) \to F$ dado por $\widetilde{T}[x] = Tx$.

   a) Probar que $\widetilde{T}$ es acotado inferiormente, y deducir que T tiene rango cerrado (*sug: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $(Tx_n)_n$ es convergente, entonces $(x_n)_n$ tiene una subsucesión convergente).*

   b) Probar que T es Fredholm si y sólo si $\ker(T')$ tiene dimensión finita.

4. Sea H espacio de Hilbert, sean $u \in \mathcal{B}(H)$, $p = u^*u$, $q = uu^*$. Probar que son equivalentes

   i) p es proyector　　*ii*) $uu^*u = u$　　*iii*) u es isometría parcial
   iv) q es proyector　　*v*) $q^{2\alpha} = q^\alpha$ para algún $\alpha > 0$

Justifique todas sus respuestas.

El examen se aprueba con dos ejercicios bien resueltos.