Análisis Funcional

Primer cuatrimestre de 2023 – Primer parcial

1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:

Nro. de libreta: Carrera:

---

1. Sea E un e.l.c. cuya topología está dada por la familia de seminormas $(\|\cdot\|_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Sea $p: E \to [0,\infty)$ continua en cero y positivamente homogénea. Probar

   a) Existen $c > 0$ y un conjunto finito $\Lambda_0 \subset \Lambda$ tales que $p \leq c\sum_{\lambda\in\Lambda_0} \|\cdot\|_\lambda$.

   b) Si p es subaditiva, entonces p es continua.

2. Sea E espacio de Banach. Probar que si existe un subespacio cerrado $S \subset E$ reflexivo tal que E/S es reflexivo, entonces E es reflexivo.

   Sug.: considerar $\Psi : (E/S)' \to S^\perp$, $\Psi(f)(x) = f([x])$; $\Phi : S' \to E'/S^\perp$, $\Phi(f) = [f]$.

3. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ una sucesión w^*-nula, es decir $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\omega^*} 0$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de combinaciones convexas de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} 0$.

   b) Existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de combinaciones convexas de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\omega^*} 0$.

4. Sea E e.l.c. real, sea $K \subset E$ compacto convexo, sea μ medida de probabilidad en K, sean $(\varphi_k)_{k=1,\dots,n} \subset E'$, sea $p = (\int_K \varphi_1, \dots, \int_K \varphi_n) \in \mathbb{R}^n$.

   a) Si $T : K \to \mathbb{R}^n$ es $T(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, probar que $p \in \mathrm{im}(T)$.

   b) Probar que existe $x_\mu \in K$ tal que $\varphi(x_\mu) = \int_K \varphi$ para toda $\varphi \in E'$.

   Sug.: considerar la intersección de los $E_\varphi = \{x \in K : \varphi(x) = \int_K \varphi\}$ *para* $\varphi \in E'$.

Justifique todas sus respuestas.

El examen se aprueba con dos ejercicios bien resueltos.