Análisis Complejo

PRIMER CUATRIMESTRE 2023

Práctica 3 - Ecuaciones de Cauchy-Riemann

1. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Probar que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a + ib \iff \lim_{z \to z_0} \mathrm{Re}(f(z)) = a \text{ y } \lim_{z \to z_0} \mathrm{Im}(f(z)) = b.$$

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \text{si } x + iy \neq 0; \\ 0, & \text{si } x + iy = 0. \end{cases}$$

Muestre que f es continua en 0 y que cumple las condiciones de Cauchy-Riemann pero que *no* es holomorfa.

3. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones de $z = x + iy$. Hallar $f'(z)$ en cada caso:

   a) $f(z) = y + ix$,
   b) $f(z) = \overline{z}$,
   c) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$,
   d) $f(z) = x^2 + iy^2$,
   e) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$,
   f) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$,
   g) $f(z) = z^3 - 2z$,
   h) $f(z) = z^2 \cdot \overline{z}$,
   i) $f(z) = \frac{z+1}{1-z}$,
   j) $f(z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{x^2+y^2}, & \text{si } z \neq 0; \\ 0, & \text{si } z = 0. \end{cases}$

4. Una función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de tipo $\mathcal{C}^2$ es armónica si $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Por otro lado, decimos que una función $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una *conjugada armónica* de u si la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa.

a) Probar que si la parte real y la parte imaginaria de una función holomorfa son $\mathcal{C}^2$, entonces ambas son funciones armónicas. Deducir que si u es una función $\mathcal{C}^2$ que admite una conjugada armónica, entonces u es armónica.

b) Si v y $\tilde{v}$ son conjugadas armónicas de u, entonces v y $\tilde{v}$ difieren en una constante.

c) Encuentre, cuando sea posible, conjugadas armónicas de las siguientes funciones:

1) $u_1(x,y) = x^2 - y^2$,
2) $u_2(x,y) = x^2y^2$,
3) $u_3(x,y) = 2x(1-y)$.

d) Muestre que si v es conjugada armónica de u, las curvas de nivel de u y v se cortan de manera ortogonal.

5. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto de $\mathbb{C}$ abierto, conexo y no vacío.

   a) Para todo z_0 y z_1 en Ω existe una curva γ de tipo $\mathcal{C}^1$ a trozos tal que $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma(1) = z_1$.

   b) Si f es holomorfa en Ω y $f' \equiv 0$ en Ω, entonces f es constante.

6. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces:

   a) $\operatorname{Re}(f)$ es constante $\Rightarrow f$ es constante.

   b) $\operatorname{Im}(f)$ es constante $\Rightarrow f$ es constante.

   c) $|f|$ es constante $\Rightarrow f$ es constante.

   d) $\arg(f)$ es constante $\Rightarrow f$ es constante.

   e) $\overline{f}$ es holomorfa $\Rightarrow f$ es constante.

7. Sean $L_1, \ldots, L_n \subseteq \mathbb{C}$ n rectas distintas. Si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $g(\mathbb{C}) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n$ entonces g es constante.

8. Sea Ω un abierto simétrico respecto del eje real y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa.

9. Encuentre todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que $f'(0) = 1$ y
$$f(x+iy) = e^x f(iy)$$
para cada x, $y \in \mathbb{R}$.

   Defina $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de manera que sea $f(iy) = c(y) + is(y)$ para cada $i \in \mathbb{R}$ y muestre que $c' = -s$ y que $s' = c$.

10. **Regla de L'Hospital.** Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

11. Calcule

a) $\lim_{z\to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$,

b) $\lim_{z\to 2i} \frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$,

c) $\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z-e^{\frac{\pi i}{3}})z}{z^3+1}$,

d) $\lim_{z\to i} \frac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}$.

12. Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una curva de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $v = \gamma'(t_0)$ el número complejo que se obtiene transladando al origen el vector tangente a la curva en $t = t_0$. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y sea $z = f'(\gamma(t_0))$. Entonces zv es el número complejo que se obtiene transladando al origen el vector tangente a la curva $f \circ \gamma$ en $t = t_0$.

13. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definidas por $\gamma_1(t) = t$ y $\gamma_2(t) = (1 + i)t$. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \operatorname{sen}(z) + z^4$. Calcule en qué ángulo se cortan las curvas $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ en $t = 0$.

Logaritmo y Raíces n-ésimas

14. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Una *rama del logaritmo* en Ω es una función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

    a) Toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω.
    b) Si g_1 y g_2 son dos ramas de logaritmo en Ω y si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1 = g_2$.
    c) Si existe una rama del logaritmo en Ω, entonces $0 \notin \Omega$ y $S^1 \nsubseteq \Omega$.

15. Sea $g : \Omega \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo y sean $b \in \mathbb{C}$ y $a \in \Omega$. Definimos $a^b = e^{b\cdot g(a)}$.

    a) Si $b \in \mathbb{N}$, entonces el valor de a^b no depende de la elección de g y coincide con el producto $\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}$.
    b) Determine todos los valores que pueden tomar i^i, $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.
    c) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones

    $$h_1 : z \in \Omega \mapsto z^b \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad h_2 : z \in \mathbb{C} \mapsto a^z \in \mathbb{C}$$

    son holomorfas.
    d) Sean $z \in \Omega$ y a, $b \in \mathbb{C}$ ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? Si además $z^a \in \Omega$, ¿qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si $b \in \mathbb{Z}$?

16. Sea Log la rama principal del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0}$. Muestre que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\arctan t = \frac{1}{2i} \log \frac{i-t}{i+t}.$$

17. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un abierto. Una *rama de la raíz n-ésima* en Ω es una función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. Si $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es una rama de la raíz n-ésima, escribimos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$.

    a) Si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, hay exactamente dos ramas de $\sqrt{z}$ en Ω. Delas explícitamente.

    b) Toda rama de la raíz cuadrada es holomorfa en su dominio.

    c) Si Ω es conexo y si f es una rama de la raíz cuadrada en Ω, entonces f y $-f$ son todas las ramas.

18. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, sea $g(z)$ una rama del logaritmo definida en Ω y notemos $\sqrt[3]{z}$ a la rama de la función raíz cúbica definida en Ω tal que $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$.

    a) Cualquiera sea la rama g elegida para el logaritmo, $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo $z \in \Omega$.

    b) Encuentre todas las ramas g del logaritmo para las cuales se tiene que $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3}g(z)$ para todo z en Ω.

    c) Probar que si en lugar de considerar el abierto Ω consideramos a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, aumenta la cantidad de ramas que satisfacen la condición el item anterior.