Análisis Complejo

Primer Cuatrimestre 2023

Práctica 1 - Números complejos

1. Calcular la parte real e imaginaria de
$$(1+2i)^3, \qquad \frac{5}{-3+4i}, \qquad \left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2, \qquad (1+i)^n+(1-i)^n,$$
$$(a+bi)^4, \qquad \frac{1}{a+bi}, \qquad \frac{a+bi-1}{a+bi+1}, \qquad \frac{1}{(a+bi)^2}.$$

2. Calcular
$$\sqrt{i}, \qquad \sqrt{-i}, \qquad \sqrt{1+i}, \qquad \sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}, \qquad \sqrt[4]{-1}, \qquad \sqrt[4]{i}, \qquad \sqrt[4]{-i}.$$

3. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, resolver la ecuación cuadrática $z^2+\alpha z+\beta=0$.

4. Probar que $\mathbb{C}$ es isomorfo al conjunto de matrices reales de la forma
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$
es decir, que existe una biyección que respeta la suma, el producto y la unidad.

5. Probar que $\mathbb{C}$ es isomorfo al conjunto de polinomios reales módulo el polinomio irreducible x^2+1.

6. Hallar los valores absolutos de $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$ y $\frac{(3+4i)(-1+2i)}{(3-i)(-1-i)}$.

7. Dados $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, probar que $z^n=\alpha$ tiene exactamente n soluciones complejas.

8. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, probar que $1+z+\cdots+z^n=\frac{z^{n+1}-1}{z-1}$.

9. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que $\{z^n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito o denso en S^1.

10. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, simplificar las expresiones
$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+...+\cos n\theta, \qquad 1+\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen} 2\theta+...+\operatorname{sen} n\theta.$$

11. Demostrar que para todo par de números reales positivos a, b vale la siguiente identidad.
$$\arctan\left(\frac{1}{a+b}\right)+\arctan\left(\frac{b}{a^2+ab+1}\right)=\arctan\left(\frac{1}{a}\right).$$

Función exponencial

Extendiendo la función exponencial real, dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se define

$$e^z = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

12. Demostrar que $e^{w+z} = e^w e^z$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$. Concluir que $e^{nz} = (e^z)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

13. Describir los z tales que $e^z = 1$.

14. Demostrar que si $e^z = e^w$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w + 2k\pi i$. Concluir que la función exponencial $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ tiene período $2\pi i$.

15. Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$ vale $e^{\bar{z}} = \bar{e^z}$.

16. Hallar $f(A)$, donde f es la función exponencial y

    a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \operatorname{Im}(z) < 2\pi\}$.
    b) A es el primer cuadrante.
    c) $A = \{t + it \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Funciones trigonométricas

17. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, mostrar que $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Generalizando las igualdades de arriba se define para $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

18. Comprobar que $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$ y $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

19. Mostrar que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen período 2π.

20. Probar que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones suryectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

21. Mostrar que los únicos valores de z para los cuales $\cos z = 0$ y $\operatorname{sen} z = 0$ son los valores reales usuales.

22. Probar que $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$ y $\operatorname{sen}(\overline{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)}$.

23. Hallar los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\cos z \in \mathbb{R}$ y los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen} z \in \mathbb{R}$.

24. Dados $a, b, b' \in \mathbb{R}$, probar que si $|b| < |b'|$ entonces $|\cos(a + bi)| < |\cos(a + b'i)|$ y $|\operatorname{sen}(a + bi)| < |\operatorname{sen}(a + b'i)|$.

Sucesiones

25. Sean $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$.

    a) Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ si y sólo si

    $$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z).$$

    b) Probar que si $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z|$. Dar un ejemplo en que no valga la recíproca.

26. *a*) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n$? Repetir para $|\alpha| > 1$.

    b) Si $|\alpha| < 1$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n\big) = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

27. Calcular, en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones

    $$\frac{1}{n}\Big(\frac{1+i}{2}\Big)^n, \quad n\Big(\frac{1+i}{2}\Big)^n, \quad \cos(n\pi) + i\frac{\operatorname{sen}(\frac{n}{2})}{n^2}, \quad \Big(\frac{(-1)^n + 1}{3}\Big)^n, \quad ni^{2n+1}.$$

28. Se define el *conjunto de Mandelbrot* como el conjunto $\mathcal{M}$ de los números complejos c tales que la sucesión definida de manera recursiva del siguiente modo:

    $$z_0 = c, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

    resulta acotada. Demostrar que $\mathcal{M} \subset \{|z| \leqslant 2\}$.

Homografías

Llamamos *plano complejo ampliado* al conjunto $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Una *homografía* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ del tipo $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$.

29. Probar que el conjunto $\mathcal{H}$ de las homografías es un grupo bajo la composición.

30. *a*) Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que existe una única homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$.

    b) Deducir que dados puntos distintos w_2, w_3, w_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_i en w_i $(i = 2, 3, 4)$.

31. Probar que toda homografía es composición de algunas de la siguiente lista:

    $$I(z) = \frac{1}{z}, \qquad H_a(z) = az,\ a \in \mathbb{C}, a \neq 0, \qquad T_b(z) = z + b,\ b \in \mathbb{C}.$$

32. Una *circunferencia* de $\widehat{\mathbb{C}}$ es un subconjunto igual o bien a una circunferencia del plano complejo o bien a la unión de una recta del plano complejo junto con el punto del infinito. Probar que una homografía manda circunferencias en circunferencias.

33. *a*) Hallar homografías que transformen

    i) los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$;

    ii) los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.

    b) Probar que la imagen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la primer homografía del ítem anterior es la recta $\{\mathrm{Re}(z) = 1\}$.

34. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq 1$, demostrar que la homografía

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{-\alpha z + 1}$$

transforma a la circunferencia $\{|z| = 1\}$ en si misma y a α en 0.

35. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ matrices no singulares que respresentan las homografías T_1 y T_2 respectivamente.

    a) ¿Qué homografía representa la matriz AB?

    b) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1}?

    c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?

    d) ¿Cuándo dos matrices distintas representan la misma homografía?

36. Demostrar que una homografía $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ si y sólo si se puede escribir con coeficientes reales.

37. Dados z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, la *razón doble* (z_1, z_2, z_3, z_4) es

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}.$$

Observar que (z_1, z_2, z_3, z_4) es la imagen de z_1 bajo la homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$.

    a) Probar que si $T \in \mathcal{H}$ entonces $\big(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)\big) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

    b) Demostrar que z_1, z_2, z_3, z_4 están en una circunferencia si y sólo si su razón doble es un número real.

    c) Demostrar nuevamente que una homografía manda circunferencias en circunferencias.

38. Sea C una circunferencia de $\widehat{\mathbb{C}}$ y z_2, z_3, z_4 puntos de C. Dos puntos z y z^* se dicen *simétricos* respecto de C si $\overline{(z, z_2, z_3, z_4)} = (z^*, z_2, z_3, z_4)$.

    a) Probar que la definición anterior no depende de los punto elegidos z_2, z_3, z_4 sino de C.

b) Probar que cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tiene un solo punto z^* simétrico respecto de C. A la aplicación que a cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ le asigna su simétrico respecto de C se la llama *simetría respecto de C*. Probar que para cada homografía T que aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en C, la función

$$T \circ \overline{T^{-1}} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$

es la simetría respecto de C.

c) Probar que si S es una homografía y z, z^* son simétricos respecto de una recta o circunferencia C, entonces $S(z)$ y $S(z^*)$ son simétricos respecto de $S(C)$.

39. Probar que el simétrico del centro de una circunferencia C (respecto a C) es ∞.

40. Probar que en caso en que C sea una recta, esta nueva noción de simetría coincide con la simetría usual.

41. Dados tres puntos distintos z_1, z_2 y z_3 en $\widehat{\mathbb{C}}$, demostrar que existe una única recta o circunferencia que pasa por z_1 y hace que z_2 y z_3 sean simétricos.

42. Hallar homografías que transformen

    a) la circunferencia $|z| = 2$ en $|z+1| = 1$ y además -2 en 0 y 0 en i;

    b) el semiplano superior $\mathrm{Im}(z) > 0$ en $|z| < 1$ y α en 0 (donde $\mathrm{Im}(\alpha) > 0$).

43. Sea $S(z) = \frac{7z+15}{-2z-4}$. Sean $z_1 = 1$ y $z_n = S(z_{n-1})$ para $n \geqslant 2$. Hallar $\lim_{n\to\infty} z_n$.