

Práctica 4

1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

(a) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d_2)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(b) $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d_2)$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\frac{1}{2}x^2 + (x-1)^2 y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$, la función identidad.

(d) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad.

Aquí d_2 es la métrica euclídea usual, y δ es la métrica discreta.

Cambia algo si en lugar de d_2 consideramos d_1 o d_∞ ?

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Probar que f es continua únicamente en $x = 0$.

3. Dado $x \in \mathbb{Q}$, denotamos $\text{den}(x) = n$ si $x = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ coprimos.

Sea $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{den}(x)}, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Probar que f es continua en $x \in (0, 1)$ si y solo si x es irracional.

Sugerencia: para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q} : \text{den}(x) \leq n\}$ es finito.

4. Sea E un espacio métrico, y sea $x_0 \in E$. Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en x_0 . Probar que si $f(x_0) > 0$ entonces existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in B(x_0, r)$.

5. Sean E y E' espacios métricos y $f, g : E \rightarrow E'$ funciones continuas.

(a) Probar que $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto.

(b) Deducir que $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

6. Considerando en cada \mathbb{R}^n la métrica euclídea d_2 , probar que:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \text{sen}(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.

- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado.
- (c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Cambia algo si en lugar de d_2 consideramos las métricas d_1 o d_∞ ?

- 7.** Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Probar que:
- (a) f continua, y sin embargo existe $G \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que $f(G)$ no es abierto.
 - (b) g es continua, y sin embargo existe $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $g(F)$ no es cerrado.
- 8.** Sean E y E' espacios métricos y $f, g : E \rightarrow E'$ funciones continuas.
- (a) Sea $D \subseteq E$ un subconjunto denso. Probar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.
 - (b) Concluir que la función $\mathcal{R} : C([0, 1]) \rightarrow \{f : \mathbb{Q} \cap [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ dada por $\mathcal{R}(f) = f|_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ es inyectiva.
- 9.** Sean E y E' espacios métricos y $f : E \rightarrow E'$ una función continua y suryectiva. Probar que si D es denso en E entonces $f(D)$ es denso en E' .
- 10.** Consideramos las funciones $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$\mathcal{E}(f) = f(0), \quad \mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

- (a) Demostrar que si utilizamos en $C([0, 1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.
 - (b) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0, 1])$ la distancia d_1 , \mathcal{I} es una función continua pero \mathcal{E} no lo es.
 - (c) Analizar si es posible que una función $\mathcal{F} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞ .
- 11.** Sea (E, d) un espacio métrico.
- (a) Sea $x_0 \in E$, y sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, x_0)$. Probar que f es continua.
 - (b) Usando esto rehacer los items (b), (d) y (g) del Ejercicio 5 de la Práctica 3.
- 12.** Sea (E, d) un espacio métrico.
- (a) Sea $A \subseteq E$, y sea $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = d(x, A)$.
 - i. Probar que g es continua.
 - ii. Probar que si A es cerrado entonces $g(x) > 0$ para todo $x \notin A$.
 - (b) Sean $A, B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos, y sea $h : E \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$h(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Probar que h es continua, y que $h(x) = 0 \forall x \in A$ y $h(x) = 1 \forall x \in B$.

- (c) Sean $A, B \subseteq E$ cerrados, no vacíos y disjuntos. Probar que existen conjuntos abiertos y disjuntos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Nota: esta última afirmación está comprendida en el llamado *Lema de Urysohn*.

- 13.** Probar que las funciones f y g de los ejercicios **11** y **12** son de tipo Lipschitz. Deducir que son uniformemente continuas.
- 14.** (a) Verificar que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en $(0, +\infty)$. Y en $[\varepsilon, +\infty)$ para $\varepsilon > 0$?
(b) Verificar que la función $f(x) = \text{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.
- 15.** Sean E, E' espacios métricos y sea $f : E \rightarrow E'$ una función uniformemente continua. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E . Probar que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E' .
- 16.** (a) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.
(b) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.
- 17.** Sea $f : (E, d) \rightarrow (E', d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subseteq E$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.
-