UBA - exactas
Departamento de Matemática

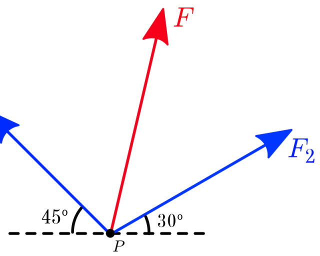
Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)

Práctica 6: Fuerzas y campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

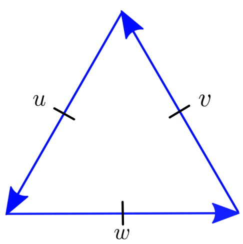
Se sugiere complementar la resolución de los ejercicios de esta práctica con GeoGebra.

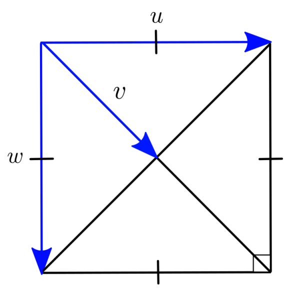
1. Si hay varias fuerzas actuando sobre un objeto, la **fuerza resultante** experimentada por dicho objeto es la suma de todas las fuerzas.

   Dos fuerzas F_1 y F_2 con magnitudes de 10 N y 12 N respectivamente actúan sobre un objeto en un punto P como muestra la figura. Calcular la fuerza resultante F actuando sobre dicho objeto y su magnitud.



2. Sea $u \in \mathbb{R}^2$ un vector de norma 1. Trasladando los vectores a un origen común, hallar gráficamente $u \cdot v$ y $u \cdot w$ en los siguientes casos:





3. Para cada uno de los siguientes vectores u, v, hallar $p_u(v)$, la proyección de v sobre u.

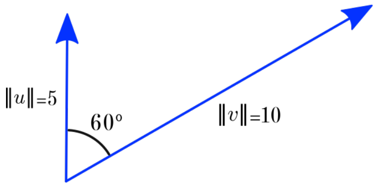
   (a) $u = (3, -4),\ v = (5, 0)$, (b) $u = (1, 2),\ v = (-4, 1)$,

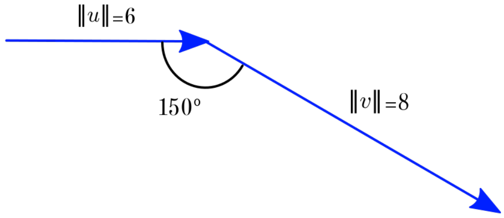
   (c) $u = (3, 6, 2),\ v = (1, 2, 3)$.

4. Sean u, v vectores. Mostrar que el vector $o_u(v) = v - p_u(v)$ es ortogonal a u.

5. Sean u, v vectores no nulos. Dar condiciones necesarias y suficientes para que $p_u(v) = p_v(u)$.

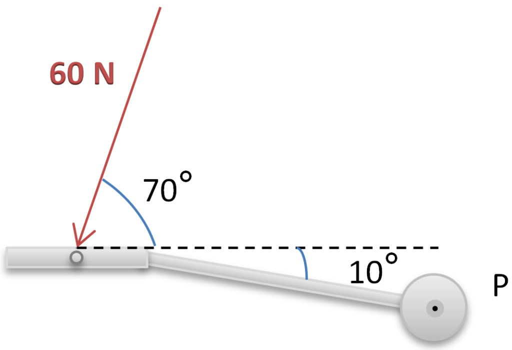
6. Decidir en que sentido apunta $u \times v$ y hallar $\|u \times v\|$ en cada uno de los siguientes casos.





7. Cuando se aplica una fuerza en algún punto de un cuerpo rígido, dicho cuerpo tiende a realizar un movimiento de rotación en torno a algún eje. El **torque** o **momento** de una fuerza es la capacidad que tiene para producir dicho movimiento de rotación. El torque se calcula como el producto vectorial de los vectores de posición y fuerza.

   Un pedal de bicicleta es empujado por un pie con una fuerza F de 60 N como muestra la imagen. El eje del pedal es de 18 cm de largo. Encontrar la norma del torque de F respecto al punto P.



Campos

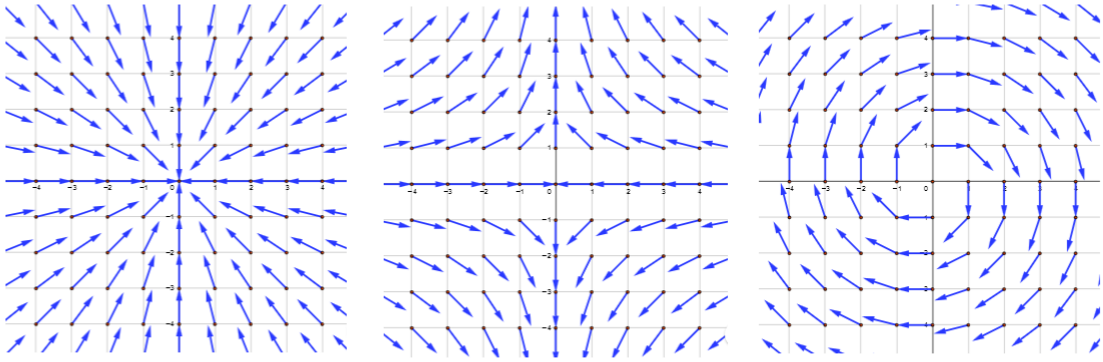
8. Identificar qué campo vectorial $\mathbf{F}$ no fue graficado, y graficarlo.

   i. $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$

   ii. $\mathbf{F}(x, y) = (-x, -y)$,

   iii. $\mathbf{F}(x, y) = (\text{sen}(x + y), \text{sen}(x + y))$,

   iv. $\mathbf{F}(x, y) = (-x, y)$.



(a) (b) (c)

9. Graficar los siguientes campos $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

   (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, 1, -x)$, (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (1, y, 1)$, (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, 1, 1)$.

10. Encontrar los campos vectoriales gradiente de f.

    (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, (b) $f(x, y, z) = xyz$, (c) $f(x, y, z) = \dfrac{e^{xz}}{y^2 + x^2}$.

11. Dibujar las curvas de nivel de las funciones junto con sus campos vectoriales gradiente. ¿Qué observa?

    (a) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, (b) $f(x, y) = x^2 - y$, (c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

12. Las **líneas de flujo** (o **líneas de corriente**) de un campo vectorial $\mathbf{F}$ son las trayectorias que sigue una partícula cuyo campo de velocidades es $\mathbf{F}$. Es decir, $\mathbf{r} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una línea de flujo de $\mathbf{F}$ si se verifica que

    $$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).$$

    Por tanto, los vectores en un campo vectorial son tangentes a las líneas de flujo.

    Hallar una línea de flujo de cada uno de los siguientes campos que pase por el punto indicado.

    (a) $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$, $p = (1, 1)$,

    (b) $\mathbf{F}(x, y) = (1, x)$, $p = (1, 0)$.

13. Para cada una de las siguientes trayectorias, hallar un campo vectorial $\mathbf{F}$ tal que $\mathbf{r}$ sea una línea de flujo de $\mathbf{F}$.

    (a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$,

    (b) $\mathbf{r}(t) = (t^3, \sqrt{t})$.