

Álgebra I

Práctica 2 - Números Naturales e Inducción

Sumatoria y Productoria

1. i) Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

- | | |
|--|-------------------------------------|
| (a) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$ | (d) $1 + 9 + 25 + 49 + \dots + 441$ |
| (b) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$ | (e) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$ |
| (c) $1 + (-4) + 9 + (-16) + 25 + \dots + (-144)$ | (f) $n + 2n + 3n + \dots + n^2$ |

ii) Reescribir cada una de los siguientes productos usando el símbolo de productoria y/o de factorial

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$ | (b) $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \dots \cdot 1024$ | (c) $n \cdot 2n \cdot 3n \cdot \dots \cdot n^2$ |
|--|---|---|

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las expresiones siguientes

- | | | | | |
|--------------------------|--|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| i) $\sum_{i=6}^n 2(i-5)$ | ii) $\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$ | iii) $\sum_{i=1}^n \frac{n+i}{2i}$ | iv) $\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$ | v) $\prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-3}$ |
|--------------------------|--|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|

3. Calcular

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| i) $\sum_{i=1}^n (4i + 1)$ | ii) $\sum_{i=6}^n 2(i - 5)$ |
|----------------------------|-----------------------------|

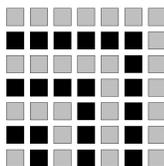
4. Calcular

- | | |
|--|--|
| i) $\sum_{i=0}^n 2^i$ | iii) $\sum_{i=0}^n q^{2i}, q \in \mathbb{R} - \{0\}$ |
| ii) $\sum_{i=1}^n q^i, q \in \mathbb{R}$ | iv) $\sum_{i=n}^{2n} q^i, q \in \mathbb{R}$ |

Inducción

5. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$:

i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



- ii) usando la suma aritmética (o suma de Gauss).
 iii) usando el principio de inducción.

6. (Suma de cuadrados y de cubos) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\text{i) } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{ii) } \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

7. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} \text{i) } \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} i^2 &= \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2} & \text{iv) } \prod_{i=1}^n (1 + a^{2^{i-1}}) &= \frac{1 - a^{2^n}}{1 - a}, \quad a \in \mathbb{R} - \{1\} \\ \text{ii) } \sum_{i=1}^n (2i+1) 3^{i-1} &= n 3^n & \text{v) } \prod_{i=1}^n \frac{n+i}{2i-3} &= 2^n (1 - 2n) \\ \text{iii) } \sum_{i=1}^n \frac{i 2^i}{(i+1)(i+2)} &= \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1 \end{aligned}$$

8. Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=1}^n a^{i-1} b^{n-i}$. Deducir la fórmula de la serie geométrica: para todo $a \neq 1$, $\sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$.

9. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$.

ii) Calcular $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$).

iii) Calcular $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}$).

10. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{i) } 3^n + 5^n &\geq 2^{n+2} & \text{v) } \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} &> \frac{n+3}{4} \\ \text{ii) } 3^n &\geq n^3 & \text{vi) } \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} &\leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ \text{iii) } \sum_{i=1}^n \frac{n+i}{i+1} &\leq 1 + n(n-1) & \text{vii) } \prod_{i=1}^n \frac{4i-1}{n+i} &\geq 1 \\ \text{iv) } \sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} &\leq n \end{aligned}$$

11. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales todos del mismo signo y tales que $a_n > -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i.$$

¿En qué paso de la demostración se usa que $a_n > -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$? ¿Y que todos los términos de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tienen el mismo signo?

ii) Deducir que si $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > -1$, entonces $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

12. Probar que

$$\begin{aligned} \text{i) } n! &\geq 3^{n-1}, \quad \forall n \geq 5 & \text{iii) } \sum_{i=1}^n \frac{3^i}{i!} &< 6n - 5, \quad \forall n \geq 3 \\ \text{ii) } 3^n - 2^n &> n^3, \quad \forall n \geq 4 \end{aligned}$$

13. Hallar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que $n^2 + 1 < 2^n$.

14. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que

- i) la cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.
 ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$.

Recurrencia

15. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = 2n a_n + 2^{n+1} n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = 2^n n!$.

ii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

16. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidas recursivamente a continuación y probar su validez.

- i) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ iii) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = n a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
 ii) $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ iv) $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

17. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + n \cdot n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n!$, y, aplicando el Ej. 9i), calcular $\sum_{i=1}^n i \cdot i!$.

ii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^3$ y, aplicando el Ej. 9i), calcular de otra forma $\sum_{i=1}^n i^2$ (comparar con Ej 6).

18. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones definidas recursivamente a continuación y probar su validez.

- i) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_{n+2} = n a_{n+1} + 2(n+1)a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
 ii) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ y $a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
 iii) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ y $2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$
 iv) $a_1 = -3$, $a_2 = 6$ y $a_{n+2} = \begin{cases} -a_{n+1} - 3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ a_{n+1} + 2a_n + 9 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$
 v) $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ y $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$

19. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2n+1}{n+2} a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n > n + \frac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

20. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones definidas recursivamente a continuación y probar su validez.

$$\text{i) } a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{ii) } a_0 = 5 \quad \text{y} \quad a_n = \begin{cases} 2 a_{n-1} & \text{si } n \text{ impar} \\ \frac{1}{5} a_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

21. Sea $f : \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0, 1\}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Para $n \in \mathbb{N}$ se define:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}}$$

Probar que $f^{3k}(x) = x$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

22. Probar que todo número natural n se escribe como suma de distintas potencias de 2, incluyendo $2^0 = 1$.
23. Probar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ si se tienen números a_1, a_2, \dots, a_n y se desea calcular su producto, entonces sin importar cómo se inserten los paréntesis en el producto, se requieren exactamente $n - 1$ multiplicaciones para calcularlo.

Comentarios:

- Recordar que la multiplicación es una operación binaria: está definida para dos números.
- Si queremos multiplicar tres números a, b, c , el enunciado afirma que se requieren dos productos. En efecto, se puede hacer $a \cdot (b \cdot c)$, o bien $(a \cdot b) \cdot c$.
- Si queremos multiplicar cuatro números a, b, c, d , el enunciado afirma que se requieren tres productos. En efecto, se puede hacer $((a \cdot b) \cdot c) \cdot d$, o bien $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$, o bien $(a \cdot (b \cdot c)) \cdot d$, o bien $a \cdot ((b \cdot c) \cdot d)$, o bien $a \cdot (b \cdot (c \cdot d))$.