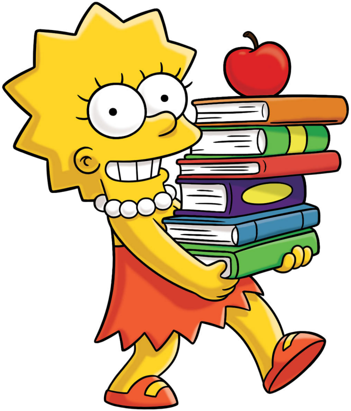
Álgebra 1

Práctica 4: Números Enteros y Divisibilidad
Viernes 28/4/2023



Propiedades de la Divisibilidad.

Sean $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$:

- $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b+c) \quad \wedge \quad a|(b-c)$
- $a|b \Rightarrow a|mb \; \forall m \in \mathbb{Z}$
- $a|b \Rightarrow a^n|b^n \; \forall n \in \mathbb{Z}$
- $a|b \iff a|(-b) \iff (-a)|b \iff -a|(-b)$
- $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$
- La divisibilidad es una relación de orden en $\mathbb{N}$: reflexiva, antisimétrica y transitiva
- No es antisimétrica en $\mathbb{Z}$: $-1|1 \wedge 1|(-1)$ pero $1 \neq -1$

¿Qué *n* dividen a 38?

Ejemplo: El conjunto de divisores de 38 es:

$$\mathcal{D}(38) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 19, \pm 38\}$$

Divisibilidad.

Ejercicio 1.

Hallar todos los $n \in \mathbb{Z} : (4n-6)|(n+8)$

Solución: Sea $n \in \mathbb{Z} : (4n-6)|(n+8)$, entonces, por propiedades de la divisibilidad:

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ccc} (4n-6) & | & 4(n+8) \\ (4n-6) & | & (4n-6) \end{array}\right\} \Rightarrow (4n-6)|\underbrace{[4n+32-(4n-6)]}_{=38}$$

$$\Rightarrow (4n-6)|38$$

$$\Rightarrow (4n-6) \in \mathcal{D}(38) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 19, \pm 38\}$$

$$\Rightarrow (4n-6) \in \mathcal{D}(38) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 19, \pm 38\}$$

- Falta chequear cuáles de estos valores sirven efectivamente para la condición:

$$(4n-6) | (n+8)$$

la flecha es una implicación sólo de izquierda a derecha.

- Falta chequear para cada posible $4n-6 \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$

$$\textit{Por ejemplo } 4n-6=1 \iff n=\frac{7}{4} \notin \mathbb{Z}$$

Chequear $n \in \mathbb{Z}$ y $(4n-6)|(n+8)$ para cada divisor de 38

- $4n-6=-38$
- $4n-6=-19$
- $4n-6=-2$
- $4n-6=-1$
- $4n-6=+1$
- $4n-6=2$
- $4n-6=19$
- $4n-6=38$

- $4n-6=-38 \Rightarrow \boxed{n=-8} \Rightarrow \underbrace{4n-6}_{=-38} \mid \underbrace{n+8}_{=0}$ ✓

- $4n-6=-19 \Rightarrow n=-\frac{13}{4} \notin \mathbb{Z}$

- $4n-6=-2 \Rightarrow n=1$ pero $4n-6=-2 \not| 9=n+8$

- $4n-6=-1 \Rightarrow n=\frac{5}{4} \notin \mathbb{Z}$

- $4n-6=+1 \Rightarrow n=\frac{7}{4} \notin \mathbb{Z}$

- $4n-6=2 \Rightarrow \boxed{n=2} \Rightarrow \underbrace{4n-6}_{=2} \mid \underbrace{n+8}_{=10}$ ✓

- $4n-6=19 \Rightarrow n=\frac{25}{4} \notin \mathbb{Z}$

- $4n-6=38 \Rightarrow n=11$ pero $4n-6=38 \not| 19=n+8$

Hallar los $n \in \mathbb{Z} : (4n - 6) | (n + 8)$

Por lo tanto, las únicas soluciones son $n = -8$ y $n = 2$ ✓

Ejercicio 2.

Hallar todos los $a \in \mathbb{Z} : (3a+6) | (a^2+11)$

Solución: Sea $a \in \mathbb{Z} : (3a+6)|(a^2+11)$, entonces, por propiedades de la divisibilidad:

$$\left.\begin{array}{lcl} (3a+6) & | & a(3a+6) \\ (3a+6) & | & 3(a^2+11) \end{array}\right\} \Rightarrow (3a+6) | \underbrace{[3a^2+6a-3a^2+11]}_{=6a-33}$$

$$\Rightarrow (3a+6)|6a-33$$

$$\left.\begin{array}{ccc} (3a+6) & \Big| & (6a-33) \\ \\ (3a+6) & \Big| & 2(3a+6) \end{array}\right\} \Rightarrow (3a+6) \Big| \underbrace{[6a-33-(6a+12)]}_{=-45}$$

$$\Rightarrow (3a+6) \Big| 45$$

$$\Rightarrow (3a+6) \in \mathcal{D}(45) = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 15, \pm 45\}$$

Chequeando en cada uno de estos valores, obtenemos como soluciones a

$$a = -7, \; a = -5, \; a = -1 \quad \wedge \; a = 13 \; \checkmark$$

Cálculos: chequear

- $a \in \mathbb{Z}$
- $(3a+6) | (a^2+11)$ para cada divisor de 45

Notar que

$$n = \underbrace{3a+6}_{\text{divisor de } 45} \iff a = \frac{n-6}{3} \in \mathbb{Z}$$

Cálculos: chequear $a \in \mathbb{N}$ y $(3a+6)|(a^2+11)$ para cada divisor de 45

- $3a+6=-45$
- $3a+6=+45$
- $3a+6=-15$
- $3a+6=+15$
- $3a+6=-9$
- $3a+6=+9$
- $3a+6=-5$
- $3a+6=+5$
- $3a+6=-3$
- $3a+6=+3$
- $3a+6=-1$
- $3a+6=+1$

- $3a+6=-45 \Rightarrow a=-17 \Rightarrow \underbrace{3a+6}_{=-45} \not| \underbrace{a^2+11}_{=300}$
- $3a+6=-15 \Rightarrow a=-7$ y vale $-15|60=a^2+11$ ✓
- $3a+6=-9 \Rightarrow a=-5 \Rightarrow \underbrace{3a+6}_{=-9} | \underbrace{a^2+11}_{=36}$ ✓
- $3a+6=-5 \Rightarrow a=-\frac{11}{3} \notin \mathbb{Z}$
- $3a+6=-3 \Rightarrow a=-3 \notin \mathbb{Z}$ pero $-3 \not| 20=a^2+11$
- $3a+6=-1 \Rightarrow a=-\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$

- $3a+6=+1 \Rightarrow a=-\frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}$
- $3a+6=3 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow \underbrace{3a+6}_{=3} \mid \underbrace{a^2+11}_{=12}$ ✓
- $3a+6=5 \Rightarrow a=-\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$
- $3a+6=9 \Rightarrow a=1$ pero $9 \nmid 12 = a^2+11$
- $3a+6=15 \Rightarrow a=3$ pero $15 \nmid 20 = a^2+11$
- $3a+6=45 \Rightarrow a=13$ y $a^2+11=180=45 \times 56$

  $\Rightarrow \underbrace{3a+6}_{=45} \mid \underbrace{a^2+11}_{=180}$ ✓

Ejercicio 3.

Probar que $6|(n^3+3n^2+2n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

Solución: Llamemos

$$N = n^3 + 3n^2 + 2n$$

Sea n una solución, entonces

- $2|6 \ \wedge \ 6|N \Rightarrow 2|N$
- $3|6 \ \wedge \ 6|N \ \Rightarrow 3|N.$

Más aún,

$$6|N \iff 2|N \wedge 3|N$$

pero esto no lo podemos usar aún...

Por inducción: $6|(n^3+3n^2+2n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

- $P(1): 6|6$ ✓

- $P(n) \Rightarrow P(n+1): \underbrace{(n+1)^3+3(n+1)^2+2(n+1)}_{=6k?}$

$$= \underbrace{(n+1)^3}_{=n^3+3n^2+3n+1} + 3\underbrace{(n+1)^2}_{=n^2+2n+1} + 2(n+1)$$

$$HI := \underbrace{(n^3+3n^2+2n)}_{=6q} + (3n^2+3n+1+6n+3+2)$$

$$= 6q+6+6n+\underbrace{3n(n+1)}_{=6k}$$ ✓

Probemos que

$$3n(n+1) = 6k$$

- $n = 2m$ par

$$\Rightarrow 3n(n+1) = 3 \cdot 2m(n+1) = 6m(n+1)$$

- $n = 2m+1$ es impar $\Rightarrow n+1 = 2m+2$ par

$$\Rightarrow 3n(n+1) = 3n \cdot 2(m+1) = 6n(m+1) \checkmark$$

Ejercicio 4

Probar que $17 \mid \left(3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Solución: Por inducción.

- $P(1)$: $17 \mid \left(3^{4+2} + 2 \cdot 4^{3+1}\right)$ pues

$$\left(3^6 + 2 \cdot 4^4\right) = 1241 = 17 \cdot 73 \checkmark$$

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$17 \mid \left(3^{4(n+1)+2} + 2 \cdot 4^{3(n+1)+1}\right) \iff 17 \mid \underbrace{\left(3^{4n+6} + 2 \cdot 4^{3n+4}\right)}$$

Queremos escribir al lado derecho como $= 17k : k \in \mathbb{Z}$:

HI: $3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1} = 17q : q \in \mathbb{Z}$

Lado Derecho de $P(n+1)$ = $3^{4n+6} + 2 \cdot 4^{3n+4}$

$$= 3^{4n+2} \cdot 3^4 + 2 \cdot 4^{3n+1} \cdot 4^3$$

Sumo y resto el término $\pm 3^{4n+2} \cdot 4^3$

$$= 3^{4n+2} \cdot 3^4 + 2 \cdot 4^{3n+1} \cdot 4^3$$

$$-3^{4n+2} \cdot 4^3 + 3^{4n+2} \cdot 4^3$$

$$= 3^{4n+2} \cdot (3^4 - 4^3) + \underbrace{[3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1}]}_{=17q} \cdot 4^3$$

$$= 3^{4n+2} \cdot (17) + 17q : \; q \in \mathbb{Z}$$

$$= \left(3^{4n+2} + q\right) \cdot 17 : \; q \in \mathbb{Z} \checkmark$$

Ejercicio 5.

Divisibilidad.

Hallar todos los $a \in \mathbb{N} : (a+1)|(2a^2+9)$

Solución: Ver que se obtiene $a = 0,\ -2,\ 10,\ -12$ ✓

Congruencias

Congruencia módulo $m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0$

$$n \equiv k \ mod(m) \iff m \Big| (n-k)$$

$$\iff n - k = m \cdot q : \ q \in \mathbb{Z}$$

$\iff$ *n y k* tienen el mismo resto en la división por m

Ejemplo : $117 \equiv 17 \ mod(5) \ porque \ 5 \Big| (117 - 17) = 100$

$$17 \equiv 2 \ mod(5) \ porque \ 5 \Big| (17 - 2) = 15$$

$$\Longrightarrow 117 \equiv 2 \ mod(5)$$

$$\Longrightarrow 117 - 2 = 5 \cdot 23 \ \Rightarrow \ 117 = 5 \cdot 23 + 2 = 5q + r$$

Clases de congruencia módulo 2

$$\mathbb{Z} = \textit{Pares} \; \cup \; \textit{Impares}$$

$$\mathbb{Z} = \{2n : \; n \in \mathbb{Z}\} \; \cup \; \{2n+1 : \; n \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{-2, \; 0, \; 2, \; 4, \; 6\} \; \cup \; \{-3, \; -1, \; 1, \; 3, \; 5\}$$

$$\mathbb{Z} = \overline{0} \; \cup \; \overline{1}$$

$=$ unión disjunta de clases de congruencia módulo 2

Clases de congruencia módulo 5

$$n \equiv k \ mod(5) \iff 5 \Big| (n-k)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{C}(0) = \{-5, 0, 5, 10, 15, \cdots \in \mathbb{Z}\} = \overline{0}$$

$$\mathcal{C}(1) = \{-4, 1, 6, 11, 16 \cdots \in \mathbb{Z}\} = \overline{1}$$

$$\mathcal{C}(2) = \{-3, 2, 7, 12, 17, \cdots \in \mathbb{Z}\} = \overline{2}$$

$$\mathcal{C}(3) = \{-2, 3, 8, 13, 18, \cdots \in \mathbb{Z}\} = \overline{3}$$

$$\mathcal{C}(4) = \{-1, 4, 9, 14, 19, \cdots \in \mathbb{Z}\} = \overline{4}$$

$\Longrightarrow \mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{3} \cup \overline{4} =$ unión disjunta de clases

Clases de congruencia módulo 5

$\Longrightarrow$ Congruencia módulo m es una relación de equivalencia

$\Longrightarrow$ Clases de congruencia módulo m=5:

$$\mathcal{C}(0) = \{5q : q \in \mathbb{Z}\} = \overline{0}$$

$$\mathcal{C}(1) = \{5q + 1 : q \in \mathbb{Z}\} = \overline{1}$$

$$\mathcal{C}(2) = \{5q + 2 : q \in \mathbb{Z}\} = \overline{2}$$

$$\mathcal{C}(3) = \{5q + 3 : q \in \mathbb{Z}\} = \overline{3}$$

$$\mathcal{C}(4) = \{5q + 4 : q \in \mathbb{Z}\} = \overline{4}$$

Ejercicio 6. Hallar todos los $k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : k! \equiv 0 \ mod \ 48$

Se pide: Hallar los k tales que $k!$ sea múltiplo de 48.

Solución: • $0! = 1 \equiv 1 \ mod \ 48$

• $1! = 1 \equiv 1 \ mod \ 48$

• $2! = 2 \equiv 2 \ mod \ 48$

• $3! = 6 \equiv 6 \ mod \ 48$

• $4! = 24 \equiv 24 \ mod \ 48$

• $5! = 120 = 48 \times 2 + 24 \equiv 24 \ mod \ 48$ pues

$$120 - 24 = 96 = 48 \times 2$$

$k! \equiv 0 \ mod \ 48 \ \forall k \geq 6$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48 \times 15 \equiv 0 \ mod(48) \equiv 0 \ mod(48)$$

Por lo tanto, todo factorial mayor es múltiplo de 48:

- $\forall \ k \geq 6 \Longrightarrow \ k! = k \cdot (k-1) \ldots 6! \ \equiv 0 \ mod(48)$

Respuesta: Los k tales que $k!$ es múltiplo de 48 son los $k \geq 6$ $\checkmark$.

Restos usando congruencia

Ej. 7.

Calcular el $0 \leq r < 48$ tal que el número

$$N = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! \equiv r \ mod(48) \ para \ cada \ n \in \mathbb{N}$$

Solución: $N \equiv r \ mod(48), 0 \leq r < 48 \Longrightarrow r = resto$

$\Longrightarrow$ *usemos congruencia*

Cálculos auxiliares: $48 = 6 \cdot 8 = 2^4 \cdot 3$

- $n = 0 \Longrightarrow 0! = 1 \equiv 1 \ mod(48)$

- $n = 1 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! = 0! + (-1)1! = 1 - 1 \equiv 0 \ mod(48)$

- $n = 2 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{2} (-1)^k k! = 0! + (-1)1! + 2! = 2 \equiv 2 \; mod(48)$

- $n = 3 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{3} (-1)^k k! = \underbrace{0! + (-1)1! + 2!}_{\equiv 2} + (-1)3!$

$$\equiv 2 - 6 \equiv -4 \equiv 44 \; mod(48)$$

- $n = 4 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{4} (-1)^k k! \equiv -4 + 4! \equiv -4 + 24 \equiv 20 \; mod(48)$

- $n = 5 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{5} (-1)^k k! \equiv 20 + (-1)5! \equiv 20 - 120 \equiv -100$

$$\equiv -4 \equiv 44 \; mod(48)$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48 \times 15 \equiv 0 \; mod(48) \equiv 0 \; mod(48)$$

$$\bullet \; n = 6 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{6} (-1)^k k! = \underbrace{\sum_{k=0}^{5} (-1)^k k!}_{\equiv 44} + \underbrace{6!}_{\equiv 0} \equiv 44 \; mod(48)$$

$$\bullet \; \forall \; k \geq 6 \Longrightarrow \; k! = k \cdot (k-1) \ldots 6! \; \equiv 0 \; mod(48)$$

Entonces, si $n \geq 6$

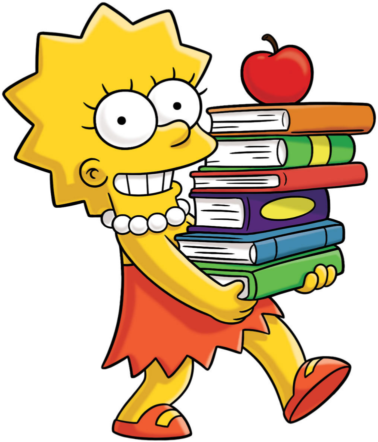
$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! = \underbrace{\sum_{k=0}^{5} (-1)^k k!}_{\equiv 44} + \underbrace{6! - 7! + \cdots + (-1)^n n!}_{\equiv 0}$$

$$\equiv 44 \; mod(48) \; \checkmark$$

Obtuvimos

$$N \equiv r : \qquad 0 \leq r < 48$$

Se dice que r es el resto de dividir a N por 48.



¡Buen fin de semana!