Práctica 1: Espacios de probabilidad

"Any argument where one supposes an arbitrary choice to be made an uncountably infinite number of times [...] is outside the domain of mathematics."
Émile Borel

Parte 1: Espacios de Probabilidad Finitos - Definición clásica de Laplace

Ejercicio 1. Se arroja dos veces un dado equilibrado.

a) Exhibir un espacio muestral que describa dicho experimento.

b) Sean A, B y C los eventos

$A = \{\text{La suma de los resultados es par}\}$

$B = \{\text{La suma de los resultados es } 8\}$

$C = \{\text{Ambos resultados son distintos}\}$.

Calcular las probabilidades de A, B, C, $A \cap C$, $A \cup C$, $A - B$ y $A - C$.

Ejercicio 2. Un bolillero contiene N bolillas numeradas desde la 1 hasta la N. Se extraen sucesivamente y sin reposición n bolillas, con $1 \leq n \leq N$. Sean m y k números naturales tales que $1 \leq m \leq N$ y $1 \leq k \leq n$. Hallar la probabilidad de que

a) se extraiga la bolilla m en la k-ésima extracción.

b) se extraiga la bolilla m.

c) el máximo número obtenido sea $\leq m$.

d) el máximo número obtenido sea m.

e) dados $a, b \in \mathbb{N}$, $n \leq a < b \leq N$, el máximo número obtenido está entre a y b inclusive.

f) los números de las bolillas extraídas en el orden en que fueron extraídas constituyan una sucesión estrictamente creciente.

Resolver nuevamente los items anteriores para el caso en que las extracciones se realizan con reposición.

Ejercicio 3. Se colocan 4 bolillas indistinguibles en 4 urnas numeradas.[1] Calcular la probabilidad de que la primer urna contenga

a) exactamente una bolilla.

[1] El modelo que consiste en ubicar bolillas indistinguibles en urnas numeradas se conoce como *estadística de Bose-Einstein* mientras que el que corresponde a ubicar bolillas distinguibles recibe el nombre de *estadística de Maxwell-Boltzmann*.

b) exactamente dos bolillas.

c) al menos una bolilla.

Resolver nuevamente el problema para el caso en que las bolillas sean distinguibles.

Ejercicio 4. Se colocan 6 bolillas en 4 urnas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que todas las urnas se encuentren ocupadas?

b) ¿Y de que al menos tres de ellas lo estén?

Resolver ambos items para la estadística de Bose-Einstein y la de Maxwell-Boltzmann.

Ejercicio 5. Se toma una muestra al azar con reposición de tamaño r de una población de n elementos.

a) Calcular la probabilidad de que en la muestra obtenida no haya elementos repetidos.

b) Se elige un grupo de r personas al azar y se les pregunta su fecha de cumpleaños. Si bien los años no son todos iguales en longitud, y se sabe que los porcentajes de nacimientos no son constantes a través del año, como una primera aproximación podemos suponer que una elección al azar de personas es equivalente a realizar una selección al azar de las fechas de nacimientos y además considerar que el año tiene 365 días. Bajo estas hipótesis, calcular la probabilidad de que entre las r personas elegidas al azar todas tengan distintas fechas de cumpleaños.[2]

c) Calcular la probabilidad de que al distribuir n bolillas distintas en n urnas numeradas se encuentren todas las urnas ocupadas.[3]

Ejercicio 6. Se reparten N bolillas distinguibles en n urnas distinguibles de tal modo que cada bolilla tiene la misma probabilidad de llegar a una urna cualquiera sea ésta. Sea el evento $A_i = \{\text{La } i\text{-ésima urna no está vacía}\}$.

a) Mostrar que para todo $k = 1, \ldots, n$ se tiene

$$V_k = P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \left(1 - \frac{j}{n}\right)^N$$

Observar que dicha probabilidad no depende de los índices $i_1, \ldots, i_k$ elegidos.

b) Probar que si $\lim_{n,N\to+\infty} \frac{N}{n} = \lambda$ entonces $\lim\limits_{n,N\to+\infty} V_k = \left(1 - e^{-\lambda}\right)^k$.

[2]¡El resultado numérico es sorprendente! Por ejemplo, para $r = 23$ tenemos que $p < \frac{1}{2}$, es decir, la probabilidad de que entre 23 personas elegidas al azar al menos dos de ellas cumplan años el mismo día es $> \frac{1}{2}$. Para $r = 30$ ya se tiene $p = 0.294$. A manera de experimento te sugerimos que consultes con tus compañeros y te fijes si hay al menos dos personas en el curso que cumplen el mismo día. ¡Los resultados suelen ser muy interesantes!

[3]Por ejemplo, para $n = 6$ resulta $p = 0.01543$. Es decir, es muy improbable que en 6 tiradas de un dado equilibrado salgan todos los números.

c) Probar la identidad

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (n-j)^n = n!$$

Sugerencia: Utilice resultados obtenidos a lo largo de esta práctica.

Ejercicio 7. Se tienen n urnas y n bolillas numeradas desde la 1 hasta la n. Se coloca al azar una bolilla en cada urna. Diremos que se produce un apareamiento cuando alguna de las bolillas es colocada en la urna con su mismo número.

a) Sea W_k la probabilidad de que ocurran exactamente k apareamientos. Mostrar que $W_k = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$. *Sugerencia.* Probar primero la fórmula para el caso $k=0$.

b) Probar que $\lim_{n\to+\infty} W_k = \frac{e^{-1}}{k!}$.

Parte 2: Espacios de Probabilidad en General

Ejercicio 8. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de eventos en $\mathcal{F}$. Demostrar las siguientes propiedades:

a) **Aditividad finita.** Si $A_1, \ldots, A_n$ son disjuntos entonces $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

b) **σ-subaditividad.** $P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$.

c) $P(A_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N} \Longrightarrow P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = 0$.

d) $P(A_i) = 1$ para todo $i \in \mathbb{N} \Longrightarrow P(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i) = 1$.

e) **Continuidad a izquierda de P.** $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ creciente $\Longrightarrow P(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$.

f) **Continuidad a derecha de P.** $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ decreciente $\Longrightarrow P(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$.

Definición: Una sucesión $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de eventos se dice creciente (respectivamente decreciente) si $A_i \subseteq A_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ (respectivamente $A_{i+1} \subseteq A_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$).

Ejercicio 9. Sean $\Omega = \{\omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un espacio numerable y una aplicación $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$. Probar que P es una medida de probabilidad si y sólo si existe una sucesión $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de números reales no negativos tal que $\sum_{i\in\mathbb{N}} p_i = 1$ y $P(A) = \sum_{i\,:\,\omega_i\in A} p_i$ para todo $A \subseteq \Omega$.[4]

Ejercicio 10. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $A_1, ..., A_n$ eventos en $\mathcal{F}$.

a) Probar la siguiente fórmula de inclusión-exclusión

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\mathcal{J}\subseteq\{1,\ldots,n\}: \\ \#(\mathcal{J})=k}} (-1)^{k+1} P\left(\cap_{i\in\mathcal{J}} A_i\right).$$

[4] Observar que este ejercicio nos dice que es posible reconstruir una medida de probabilidad sobre un espacio a lo sumo numerable conociendo únicamente las probabilidades de eventos elementales (de cardinal uno). Esta es una propiedad importante de los espacios de probabilidad a lo sumo numerables que no vale en general para espacios de mayor cardinalidad.

b) Concluir que si existen números reales no negativos $b_1, \ldots, b_n$ tales que para $k = 1, \ldots, n$ vale que $P(\cap_{i \in \mathcal{J}} A_i) = b_k$ para todo $\mathcal{J}$ con $\#(\mathcal{J}) = k$ entonces la fórmula anterior se reduce a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} b_k.$$