

PRÁCTICA 9: ESTADÍSTICA

"All models are wrong, but some are useful."
GEORGE P. BOX

Ejercicio 1. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu, \sigma)$. Obtener los estimadores de máxima verosimilitud (EMV) de

- a) μ con $\sigma^2 = \sigma_0^2$ conocida
- b) σ con $\mu = \mu_0$ conocida
- c) μ y σ^2

Ejercicio 2. Consideremos muestras aleatorias X_1, \dots, X_n para cada una de las siguientes distribuciones:

- i) exponencial de parámetro θ
- ii) Poisson de parámetro θ
- iii) con densidad

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} x^{(\frac{1}{\theta}-1)} I_{[0,1]}(x), \quad \theta > 0.$$

- a) Encontrar en cada caso el estimador de máxima verosimilitud y el de momentos de θ .
- b) En los dos primeros casos y para el estimador de máxima verosimilitud del tercero, decir si los estimadores obtenidos son insesgados o asintóticamente insesgados.
- c) Decir si los estimadores obtenidos son consistentes.

Ejercicio 3. Se define el error cuadrático medio de un estimador $\hat{\theta}$ como

$$ECM(\hat{\theta}) = \mathbb{E} \left[(\hat{\theta} - \theta)^2 \right]$$

- a) Verificar que $ECM(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + (\text{sesgo}(\hat{\theta}))^2$ donde $\text{sesgo}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta$.
- b) ¿Cuánto vale $ECM(\hat{\theta})$ si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ ?

Ejercicio 4. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución con densidad

$$f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)} I_{[\theta, \infty)}(x).$$

- a) Probar que $T = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ es el estimador de máxima verosimilitud de θ .
- b) Calcular el estimador de θ basado en el primer momento.

- c) Decir si los estimadores obtenidos son insesgados o asintóticamente insesgados, y consistentes.
- d) Hallar un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para θ .
- e) Se realiza un estudio en el que se recogen $n = 50$ valores de x_i , obteniéndose que $\sum_{i=1}^{50} x_i = 146,28$. Dar una estimación puntual de θ basada en el estimación de momentos para esta muestra.
- SUGERENCIA: Encontrar la distribución de $\min_{1 \leq i \leq n} (X_i) - \theta$.

Ejercicio 5. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población normal.

- a) Encontrar un intervalo de confianza de nivel exacto $1 - \alpha$ para la media cuando la varianza es conocida.
- b) Se realiza a 10 pacientes un análisis de sangre y se determina el porcentaje de hemoglobina, obteniéndose $\bar{X} = 12$.
- i) Hallar un intervalo de confianza para la media verdadera de nivel exacto 0.90, suponiendo que la concentración de hemoglobina se distribuye normalmente y que $\sigma = 0.6$.
- ii) Si se quisiera que la longitud del intervalo hallado en i) fuera a lo sumo 0.5, ¿a cuántos pacientes debería analizarse?

Ejercicio 6. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población $\mathcal{P}(\lambda)$. Hallar un intervalo de confianza de nivel asintótico $1 - \alpha$ para λ .

Ejercicio 7. Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria con densidad:

$$f(x; \theta) = \frac{\theta}{x^2} \mathbb{1}_{[\theta, +\infty)}(x), \quad \theta > 0.$$

- a) Hallar $\hat{\theta}_n$ el EMV de θ .
- b) Probar que la función de distribución acumulada de $T = \frac{\theta_n}{\theta}$ es $F_T(t) = \mathbb{1}_{[1, +\infty)}(t)(1 - \frac{1}{t^n})$.
- c) Hallar un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha$ para θ .
- d) Hallar la esperanza de la longitud del intervalo hallado en c).
- e) Calcular un intervalo de confianza de nivel 0.90 basado en la siguiente muestra:

8 10 7,5 6 9,5 11 7 9 10 6.