PRÁCTICA 8: CONVERGENCIA EN DISTRIBUCIÓN Y TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Ejercicio 1. Sean X e Y variables aleatorias. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la variable aleatoria $Z_n = \frac{1}{n} \cdot X + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot Y$. Hallar el límite en distribución de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio 2. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y X variables aleatorias discretas a valores en $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Mostrar que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} p_n(k) = p(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 3. Sean $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes tales que vale $0 < p_n < 1$ y $\lambda_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$ y $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n$.

a) Si $X_n \sim Bi(k, p_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ con $X \sim Bi(k, p)$.

b) Si $Y_n \sim Ge(p_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$ con $Y \sim \mathcal{G}(p)$.

c) Si $Z_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ con $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Ejercicio 4. Sea X_n una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p_n. Probar que si p_n tiende a cero cuando n tiende a infinito de manera tal que $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Ejercicio 5. De un bolillero que contiene en su interior B bolillas blancas y N bolillas negras se extraen sucesivamente y sin reposición n de ellas. Sea $X_{B,N}$ la cantidad de bolillas blancas obtenidas.

a) ¿Cuál es la distribución de $X_{B,N}$?

b) Probar que si B y N tienden a infinito de modo tal que $\frac{B}{B+N} \to p$ entonces

$$X_{B,N} \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim Bi(n, p).$$

c) Establecer la convergencia en distribución del item b en términos de distribuciones conocidas. [1]

Ejercicio 6. Sean $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ sucesiones convergentes tales que $\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \mu$ y $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$.

a) Probar que si $X_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.[2]

b) ¿Qué sucede con la convergencia en distribución si $|\mu| = +\infty$ o $\sigma = +\infty$?

[1] Este ejercicio muestra que si el número de bolillas en el bolillero tiende a infinito entonces sacar con o sin reposición pierde importancia. ¿Por qué será esto?

[2] Por convención, denotamos por $\mathrm{N}(\mu, 0)$ a la variable aleatoria constante μ.

Ejercicio 7. Hallar el límite en distribución de la sucesión $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ la variable aleatoria Z_n tiene distribución uniforme en el conjunto $\{\frac{i}{n} : 1 \leq i \leq n\}$.

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ la variable aleatoria nZ_n tiene distribución geométrica de parámetro $\frac{\lambda}{n}$.

Ejercicio 8. Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[a,b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las variables aleatorias

$$Y_n = \min\{U_1, \dots, U_n\} \qquad \text{y} \qquad Z_n = \max\{U_1, \dots, U_n\}.$$

a) Hallar los límites en distribución de las sucesiones $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Hallar los límites en distribución de las sucesiones $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$

$$V_n = n(Y_n - a) \qquad \text{y} \qquad W_n = n(b - Z_n).$$

Ejercicio 9. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión que satisface $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $a_n(X_n - X) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ para ciertas variables aleatorias X y Z.

a) Probar que $X_n \xrightarrow{P} X$.

b) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media μ y varianza σ^2. Mostrar que

$$n^\alpha(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \\ \infty & \text{si } \alpha > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

donde $n^\alpha(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \infty$ significa que para todo $M > 0$ se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} P(|n^\alpha(\overline{X}_n - \mu)| \leq M) = 0.$$

¿Qué sucede si $\alpha = \frac{1}{2}$?[3]

Ejercicio 10. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X otra variable aleatoria no necesariamente definidas sobre un mismo espacio. Probar que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} g(X)$ para toda $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

Ejercicio 11.

a) Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{2}{x^3} \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x).$$

Calcular aproximadamente $P\left(\prod_{i=1}^n X_i > e^{55}\right)$ con $n = 100$. *Sugerencia*: Hallar la distribución de $\log X$.

[3]Observar que esto muestra que las fluctuaciones del promedio con respecto a su media son de orden $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en el casos de variables aleatorias i.i.d. con varianza finita.

b) Hallar n tal que la el error cometido sea menor a 0.1.

Ejercicio 12. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada F. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$ se define la variable aleatoria[4][5]

$$F_n(t) = \frac{\#\{i \in \{1, \ldots, n\} : X_i \leq t\}}{n}.$$

a) Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$ se satisface $F_n(t) \xrightarrow{cs} F(t)$.

b) Mostrar que $\sqrt{n}\big(F_n(t) - F(t)\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathrm{N}\big(0, F(t)(1 - F(t))\big)$.

Ejercicio 13. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\mathbb{E}(X_1) = 0$, $\mathbb{E}(X_1^2) = 2$ y $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las variables aleatorias

$$Y_n = \frac{\sqrt{n}\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n {X_i}^2} \qquad Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n {X_i}^2}} \qquad W_n = n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2,$$

hallar el límite en distribución de las sucesiones $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio 14. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetro λ. Hallar el límite en distribución de $\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \lambda^2)$.

Ejercicio 15. Sean X_n e Y_m dos variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetros n y m, respectivamente. Probar que

$$\frac{(X_n - n) + (Y_m - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathrm{N}(0,1) \quad \text{cuando } n, m \to +\infty.$$

Ejercicio 16. Se realizan n ensayos Bernoulli en forma independiente, cada uno de ellos con probabilidad de éxito 0.6.

a) Si $n = 10^4$ Estimar la probabilidad de que se produzcan entre 7901 y 8100 éxitos. Acotar el error.

b) Hallar n tal que el error cometido sea menor a 0.1.

Ejercicio 17. Sean $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Consideremos la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias definidas para cada $n \in \mathbb{N}$ como $X_n = c_n Y_n$. Probar que:

a) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| = c < +\infty$ entonces $\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} cX$ con $X \sim \mathcal{C}(0,1)$.

b) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| = +\infty$ entonces no existe ninguna variable aleatoria Z tal que $\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$.

c) Si $c_n = \frac{1}{n}$ entonces $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} 0$.
Sugerencia: Puede resultarle útil la desigualdad $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \log(n) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

---

[4] Observar que la aplicación $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de distribución acumulada aleatoria, es decir, si definimos $F_n : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F_n(\omega, t) = F_n(t)(\omega)$ entonces para cada $\omega \in \Omega$ la aplicación $F_n(\omega, \cdot)$ es una función de distribución acumulada.

[5] A las funciones de distribución acumulada F_n se las conoce como *medidas empíricas* (o *funciones de distribución muestral*) y son estimadores de la función de distribución F. Valen resultados de convergencia de F_n a F aún más fuertes de los que se muestran aquí.