Práctica 4: Esperanza de variables aleatorias discretas

"A mathematician is a device for turning coffee into theorems."
Paul Erdős

Ejercicio 1. Sea X el resultado que se obtiene al arrojar un dado equilibrado una vez. Si antes de arrojar el dado se ofrece la opción de elegir entre recibir $\frac{2}{7}$ ó $h(X) = \frac{1}{X}$, decidir cuál de las dos opciones es preferible, en el sentido de cuál tiene un mayor valor esperado.

Ejercicio 2. En un comercio de artículos para el hogar hay 6 televisores en stock. El número de clientes que entran a comprar un televisor por semana es una variable aleatoria X con distribución $\mathcal{P}(5)$. Cada cliente que entra a comprar un televisor lo comprará si todavía hay stock. ¿Cuál es el número esperado de televisores a ser vendidos durante la próxima semana?

Ejercicio 3. Un juego consiste en arrojar un dado equilibrado hasta obtener un número mayor o igual que 4. Si X es el número de veces que se arroja el dado a lo largo del juego, el puntaje que se obtiene por jugar es $(4 - X)$ si $1 \leq X \leq 3$ y no se obtiene puntaje en caso contrario. ¿Cuál es el puntaje esperado de este juego?

Ejercicio 4. Hallar la esperanza y varianza de las siguientes variables aleatorias:

a) $Bi(n, p)$. *Sugerencia*: ¿Qué distribución tiene la suma de n variables aleatorias independientes $Be(p)$?

b) $Ge(p)$. *Sugerencia*: Recordar que una serie de potencias es derivable dentro de su radio de convergencia.

c) $BN(r, p)$. *Sugerencia*: ¿Qué distribución tiene la suma de r variables aleatorias independientes $\mathcal{G}(p)$?

d) $\mathcal{P}(\lambda)$. *Sugerencia*: Para hallar $\mathrm{Var}(X)$ calcular primero $\mathbb{E}\left(X\left(X-1\right)\right)$.

Ejercicio 5. Se distribuyen al azar N bolillas indistinguibles en m urnas. Sean X el número de urnas vacías, Y el número de urnas que contienen exactamente una bolilla y Z el número de urnas que contienen dos o más bolillas.

a) Hallar $\mathbb{E}(X)$.
Sugerencia: Sea

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ésima urna está vacía} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Verificar que $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$.

b) Hallar $\mathbb{E}(Y)$ y $\mathbb{E}(Z)$.

c) Un centro cultural dispone de m cuentas de correo electrónico para comunicarse con el público. Durante un día en particular, N personas envían sus inquietudes vía e-mail al centro cultural, eligiendo una cuenta al azar para hacerlo. Hallar la esperanza del número de cuentas de correo que no son usadas durante dicho día.

Ejercicio 6. Dada una urna con N bolillas de las cuales D son blancas y $N-D$ son negras, se extraen n sin reposición. Sean

$$X = \text{número de bolillas blancas extraídas}$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la i-ésima bolilla extraída es blanca} \\ 0 & \text{si la i-ésima bolilla extraída es negra.} \end{cases}$$

Observar que $X \sim \mathcal{H}(N, D, n)$.

a) Mostrar que $P(X_i = 1) = \frac{D}{N}$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y que para $i \neq j$ se tiene

$$P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{D(D-1)}{N(N-1)}.$$

b) Calcular $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathrm{Var}(X_i)$.

c) Calcular $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ para $i \neq j$.

d) Hallar $\mathbb{E}(X)$. Verificar que

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(N-n)nD(N-D)}{(N-1)N^2}$$

Ejercicio 7. El problema del coleccionista de cupones
Un hombre colecciona cupones de un álbum compuesto por N cupones distintos. El hombre adquiere sus cupones comprando uno por día en el kiosko de la esquina de su casa y, cada vez que adquiere uno, éste tiene igual probabilidad de ser cualquiera de los N que componen el álbum.

a) Hallar la esperanza del número de cupones diferentes que hay en un conjunto de k figuritas.

b) Hallar el número esperado de cupones que es necesario juntar para completar el álbum.

Ejercicio 8.

a) Mostrar con un ejemplo que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ no implica que X e Y sean independientes.

b) Sean X e Y dos variables aleatorias que toman sólo dos valores cada una. Probar que si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ entonces X e Y son independientes.

   Sugerencia: Considerar primero el caso en que los dos valores que toma cada variable son 0 y 1.

Ejercicio 9. Esquema de Polya (Sí, otra vez). De un bolillero que contiene B bolillas blancas y R rojas se extrae una bolilla al azar y se la devuelve al bolillero junto con otras c bolillas del mismo color. Se repite este procedimiento sucesivamente comenzando en cada nuevo paso con la composición del bolillero resultante del paso anterior. Sean

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ésima bolilla extraída es roja} \\ 0 & \text{si la } i\text{-ésima bolilla extraida es blanca} \end{cases}$$

a) ¿Qué distribución tienen las variables aleatorias X_i?

b) Hallar $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathrm{Var}(X_i)$ y $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

c) Sea $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$ el número de bolillas rojas extraídas luego de j extracciones. Hallar $\mathbb{E}(S_j)$ y $\mathrm{Var}(S_j)$.

Ejercicio 10.
Sea X una variable aleatoria discreta con $R_X \subseteq \mathbb{N}_0$. Probar que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$