

## MATEMATICA 2

### Práctica 4 - Autovalores y autovectores - Diagonalización - Subespacios invariantes

**Ejercicio 1.** Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de las matrices que siguen. Decidir si son diagonalizables o no y en caso afirmativo hallar una matriz inversible que la diagonalice. (Analizar por separado los casos  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$  cuando corresponda.)

i)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$       ii)  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$       iii)  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

iv)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$       v)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$       vi)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 2.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

i) Encontrar una base  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $|f|_B$  sea diagonal.

ii) Calcular  $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

iii) Hallar, si es posible, una matriz  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $f : K^n \rightarrow K^n$  un proyector con  $\dim(\text{Im}(f))=s$ . Probar que  $f$  es diagonalizable y calcular  $\mathcal{X}_f$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$ . Determinar todos los  $a, b$  y  $c \in K$  para los que  $A$  es diagonalizable.

**Ejercicio 5.** Hallar todos los valores de  $k \in \mathbb{R}$  tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k + k^2 & -k^2 \\ 0 & k + 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k + 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 6.** Se define la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 4, a_1 = 9 \\ a_{n+2} = 5.a_{n+1} - 6.a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

- i) Sea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ . Verificar que, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$ .
- ii) Probar que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ .
- iii) Encontrar una matriz inversible  $P$  tal que  $P.A.P^{-1}$  sea diagonal.
- iv) Hallar la fórmula general para el término  $a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ .

**Ejercicio 7.** Encontrar una fórmula general para el término  $a_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) de la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  definida por

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

en los siguientes casos:

- i)  $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$
- ii)  $a_0 = 0, a_1 = 3$

**Ejercicio 8.** Resolver el sistema de ecuaciones en diferencias (es decir, encontrar una fórmula general para los términos  $x_n$  e  $y_n$  en función de  $x_0$  e  $y_0$ ):

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$$

**Ejercicio 9.**

- i) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 3, y(0) = -1$ .

- ii) Probar que  $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f'' = f\} = \langle e^x, e^{-x} \rangle$ .

Sugerencia: Llamar  $g = f'$  y considerar el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} f' = g \\ g' = f \end{cases}$

**Ejercicio 10.** Sea  $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$  la transformación lineal derivación. Mostrar que para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la función  $f(x) = e^{\lambda x}$  es un autovector de  $\delta$  asociado al autovalor  $\lambda$ . (Observar que entonces  $\delta$  tiene infinitos autovalores.)

**Ejercicio 11.** Dadas las matrices  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  y los polinomios  $P \in \mathbb{C}[X]$ , calcular  $P(A)$  para:

- i)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , a)  $P = X - 1$ , b)  $P = X^2 - 1$ , c)  $P = (X - 1)^2$   
 ii)  $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ ,  $P = X^3 - i.X^2 + 1 + i$

**Ejercicio 12.** Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

- i) Calcular  $A^4 - 4.A^3 - A^2 + 2.A - 5.I_2$  para  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$   
 ii) Calcular  $A^{1000}$  para  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$   
 iii) Calcular  $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \forall n \in \mathbb{N}$   
 iv) Dada  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ , expresar a  $A^{-1}$  como combinación lineal de  $A$  y de  $I_2$ .

**Ejercicio 13.**

- i) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación lineal definida por  $f(x, y) = (x + 3.y, 3.x - 2.y)$ . Hallar todos los subespacios de  $\mathbb{R}^2$  que sean  $f$ -invariantes.  
 ii) Sea  $f_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la rotación de ángulo  $\theta$ :

$$|f_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Probar que, para todo  $\theta \neq k.\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),  $f_\theta$  no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de  $\mathbb{R}^2$  que sean  $f_\theta$ -invariantes.

- iii) Sea  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $g_\theta : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  la transformación  $\mathbb{C}$ -lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

¿Es  $g_\theta$  diagonalizable? Hallar todos los subespacios de  $\mathbb{C}^2$  que sean  $g_\theta$ -invariantes.

**Ejercicio 14.** Sea  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  la transformación lineal definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0)$$

- i) Hallar, para cada  $0 \leq i \leq 5$ , un subespacio  $S_i$  de  $\mathbb{R}^5$  con  $\dim(S_i) = i$  que sea  $f$ -invariante.

- ii) Probar que no existen subespacios propios  $f$ -invariantes  $S$  y  $T$  de  $\mathbb{R}^5$  tales que  $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $\chi_A = (x - \alpha) \cdot (x - z) \cdot (x - \bar{z})$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ . Sea  $g_A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  la transformación lineal  $g_A(x) = A \cdot x$ .

- i) Probar que existe  $v_1$ , autovector de  $g_A$  de autovalor  $\alpha$ , con todas sus coordenadas reales.
- ii) Sea  $w = v_2 + i \cdot v_3$ , con  $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ , un autovector de  $g_A$  asociado al autovalor  $z$ . Probar que  $\bar{w} = v_2 - i \cdot v_3$  es un autovector de  $g_A$  de autovalor  $\bar{z}$ .
- iii) Se considera  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal  $f_A(x) = A \cdot x$ . Probar que  $\langle v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$  es un subespacio  $f_A$ -invariante de dimensión 2.
- iv) Sea  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ . Verificar que  $B$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  y hallar  $|f_A|_B$ .

**Ejercicio 16.** Sea  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , y sea  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal definida por  $f_A(x) = A \cdot x$ . Hallar subespacios propios  $S$  y  $T$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f_A$ -invariantes, tales que  $S \oplus T = \mathbb{R}^3$ .