Probabilidades y Estadística M – Primer cuatrimestre de 2020, segundo cuatrimestre de 2020, primer cuatrimestre de 2021
Cronograma Detallado de Clases teóricas.

Clase 1:

Presentación de la materia en el horario de la teórica por zoom.
Modalidad de la clase:
Hay teóricas grabadas con el contenido teórico de cada tema. Hay también clases prácticas grabadas. En el siguiente cronograma detallamos antes de qué clase deben ser vistas. A la vez, habrá encuentros sincrónicos por zoom en los horarios de clase preestablecidos.
Para ver los videos en youtube (también están subidos al campus de la materia) se pueden seguir los links que figuran a continuación. Otra opción es seguir el canal (María Eugenia Szretter), ahí aparecen ordenados por capítulo en distintas listas de reproducción.

La idea es que lleguen a la clase teórica con los videos correspondientes vistos y aprovechen el horario de zoom sincrónico para consultar las dudas de los videos. Para afianzar el contenido de los videos, en las clases teóricas destinaremos el tiempo restante a pensar y resolver distintos ejercicios sobre los temas vistos. Habrá un listado de ejercicios para cada clase (se denominan ejerciciosT1, ejerciciosT2, etc., de acuerdo al capítulo en el que estemos), o grupo de clases. Esperamos que el tiempo del zoom se destine a resolver y a intercambiar distintas ideas sobre los ejercicios, y sobre los alcances y limitaciones de los resultados teóricos. Los listados de ejercicios que resolvemos en la teórica se llaman ejercicios T1.pdf, ejercicios T2.pdf, etc, y se encuentran subidos en la misma carpeta donde están los archivos sobre los cuales se basan los videos, en el campus de la materia.

Capítulo 1. Espacios de probabilidad

(Total 91:25 minutos, o sea 01:31:25 horas)

Link a la lista de reproducción de los videos del capítulo 1 https://youtube.com/playlist?list=PLKjaRXyAL3tEjC_tI3bcQwN1RK2Rr-CJ1

Clase 2: (ver los videos detallados aquí antes de cada clase)
Archivo con el material en el que se basan los videos: espaciodeprobabilidad.pdf
Lista de ejercicios de la clase teórica ejerciciosT1.pdf

1. **Video** Espacios de proba 1 https://youtu.be/cmpup3vwwdc
   (duración 15:22)
   Experimentos determinisitas y aleatorios. Ejemplo: Paseo al azar unidimensional. Otro ejemplo: simulación de contagios del Washington Post. Definición del espacio muestral. Ejemplos. Presentación del software R.

2. **Video** Espacios de proba 2 https://youtu.be/q5N_2K86wr4
   (duración 09:24)

Experimentos aleatorios en R. Definición y ejemplos de evento. Operaciones entre conjuntos. Propiedades de las operaciones entre eventos: Leyes de De Morgan.

3. **Video** Espacios de proba 3 https://youtu.be/dSNRSq3HpU0
   (duración 12:39)
   Idea intuitiva de la probabilidad. Clases de conjuntos: álgebras y sigma-álgebras. Función de probabilidad. Propiedades de la probabilidad: probabilidad del vacío, aditividad finita y probabilidad del complemento.

   Ejercicios para afianzar: Ejercicios_sigma_algebra.

4. **Video** Espacios de proba 4 https://youtu.be/Smslv1lHqGM
   (duración)
   Más propiedades de la probabilidad: probabilidad de la unión de dos eventos, monotonía, continuidad de la probabilidad, sigma sub-aditividad
   (duración 08:35)
   Actividad: Pensar cómo debería ser la fórmula de la probabilidad de la unión de tres eventos P(A U B U C), con A, B, C no necesariamente disjuntos. Y probar que vale la fórmula propuesta.

5. **Video** Espacios de proba 5 https://youtu.be/jDdhnAatTmg
   (duración 08:52)
   Calculamos la P(A U B U C). Principio de inclusión-exclusión. Probabilidad en espacios finitos o numerables. Espacios muestrales finitos: espacios equiprobables.

   Actividad: Resolver el ejemplo de permutaciones de dígitos, con el que termina el video. Archivo permutaciones_1984

6. **Video**: Espacios de proba 6 https://youtu.be/nwoWuvhn_qg
   (duración 16:15)
   Resolvemos el ejercicio de permutaciones de los dígitos, buscamos 1984. Y dejamos planteado un ejercicio de cantidad de hijos por familia, que queda como ejercicio. Más sobre sigma-álgebra. Sigma-álgebra generada por la colección G. Borelianos de R y de Rn.

   Actividad: Hacer el ejercicio de cantidad de hijos por familia (archivo cantidad_de_hijos). Y toda la Práctica 1.

7. **Video**: Espacios de proba 7 https://youtu.be/Wrnyz2cSsVU
   (duración 20:18)
   Discutimos por qué tiene sentido considerar sigma álgebras distintas de partes de Omega para definir un espacio de probabilidad asociado a un experimento. Y por qué las sigma álgebras codifican la información contenida en un experimento. (20 min)

Capítulo 2: Probabilidad condicional e independencia

(Total 55:44 minutos)

Link a la lista de reproducción de los videos del capítulo 2
https://youtube.com/playlist?list=PLKjaRXyAL3tHihiBwRBgD7BUW5Q8UM87a

Archivo con el material en el que se basan los videos: probabcondicional
Lista de ejercicios de la clase teórica ejerciciosT2

Clase 3:

- **Video**: probab condicional 1 https://youtu.be/numACtfyBAU
  (duración 10:25)
  Noción intuitiva de la probabilidad condicional. Ejemplo de despenalización del aborto. Definición de probabilidad condicional de A dado B. Lema: P(. |B) es una probabilidad en Omega. Ejemplo: familia con dos hijes.

  Actividad: Resolver el ejemplo de la familia con dos hijos. Ejemplo 2.2: Una familia tiene dos hijos. Sabiendo que al menos uno es varón, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean varones?

- **Video**: probab condicional 2 https://youtu.be/9kd0cIcTiIs
  (duración 13:24)
  Resolvemos el ejemplo de los hijos. Probabilidad de la intersección entre A y B. Ejemplo de urnas con bolas de colores. Probabilidad de la intersección de n eventos a partir de la probabilidad condicional. Ejemplo de seguros.

  Actividad: Resolver el ejemplo de seguros.

- **Video**: probab condicional 3 https://youtu.be/bnEj2YCa0TE
  (duración 11:58)
  Resolvemos el ejemplo de los seguros. Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes. Planteamos el ejemplo de los errores de diagnóstico del laboratorio.

  Actividades: Ver los dos breves videos de la gente de 3blue1brown.com sobre el Teorema de Bayes, en los siguientes links

  - *Perhaps the most important formula in probability Bayes theorem, and making probability intuitiv*e (en inglés pero subtitulado) https://youtu.be/HZGCoVF3YvM

  - *The quick proof*: https://youtu.be/U_85TaXbeIo

  Luego resolver el ejemplo de los errores en el test de diagnóstico de laboratorio, enunciado acá.

- **Video**: probab condicional 4 https://youtu.be/Q-wcB3bVxTo
  (duración 19:57)

  Resolvemos el ejemplo de test de diagnóstico de laboratorio. Independencia de dos eventos. Propiedades de independencia. Independencia de n eventos.

Actividades: Resolver estos dos ejercicios: moneda_y_despenalizacion. La respuesta del segundo acá. Además, deben resolver toda la Práctica 2.

Capítulo 3: Variables Aleatorias, introducción y discretas.

(Total 130:22 minutos , o sea, 02:10:22 horas.)

Link a la lista de reproducción de los videos del capítulo 3
https://youtube.com/playlist?list=PLKjaRXyAL3tGT1VH-1un2bl-qjHuhdaWh

Clase 4:

- Video variables aleatorias 1 https://youtu.be/99lPguze2kA
(duración 15:19)
Definición de variable aleatoria. Ejemplos. Notación. Función de distribución.

  Actividad: Calcular la función de distribución (acumulada) asociada a cada una de las dos variables aleatorias, y graficarlas:
  - Tiramos una moneda equilibrada dos veces consecutivas, y definimos X = “cantidad de caras obtenidas”.
  - Se elige un punto al azar sobre un tablero circular de radio siete. Definimos X = “distancia del punto elegido al centro del tablero”

- **Video** variables aleatorias 2 https://youtu.be/ii_Gm3y7_vs
(duración 23:32)
Calculamos y graficamos las funciones de distribucion de nuestros ejemplos. Propiedades de la función de distribución, con demostración. Caracterización de la función de distribución a través de 4 propiedades (prueba más adelante).

  Actividad: Resolver el ejercicio 3.1.

Clase 5:

- **Video** variables aleatorias 3 https://youtu.be/5Qh-HNix2no
(duración 31:59)
Relación entre variables aleatorias y borelianos. Interpretación de que la función de distribución caracteriza a la variable aleatoria. Variables aleatorias discretas. Rango y función de probabilidad puntual (f.p.p.) de una v.a. discreta. Gráfico de la función de probabilidad puntual. Propiedades de una variable aleatoria discreta. Relación entre la f.p.p. y la función de distribución. Función indicadora.

  Actividad: Resolver los ejercicios 3.2 y 3.3 sobre función indicadora.

- **Video** variables aleatorias 4 https://youtu.be/IHgdxMpNG_k
(duración 15:07)
Distribuciones discretas famosas. Distribución Bernoulli. Ensayo Bernoulli. Distribución Binomial. Terminamos presentando dos ejercicios.

  Actividad: Resolver el ejercicio 3.4 (deducir la f.p.p. de la Binomial) y el ejercicio del final de matemática del CBC, que figuran acá.

- **Video** variables aleatorias 5: https://youtu.be/ahFz2NYJT74
(duración 34:17)
Resolvemos el ejercicio de la probabilidad de aprobar el final de matemática del CBC contestando al azar. Seguimos presentando distribuciones discretas famosas: distribución hipergeométrica. Aproximación de la distribución hipergeométrica por la distribución binomial. Distribución geométrica. Propiedad de falta de memoria de la distribución geométrica. Distribución binomial negativa.

  Actividad: Resolver el siguiente ejercicio. Dos tenistas A y B igualmente hábiles juegan un partido al mejor de 5 sets. ¿Cuál es la probabilidad de que el partido termine al finalizar el cuarto set?

- **Video** variables aleatorias 6 https://youtu.be/NGPpWOFntxI
(duración 10:08)
Distribución Poisson. Aproximación Poisson a la Binomial.

  Actividad: Hacer toda la Práctica 3.

Capítulo 4: Variables aleatorias continuas

Link a la lista de reproducción de los videos del capítulo 4
https://youtube.com/playlist?list=PLKjaRXyAL3tEvzWlj_UQd9OrOHtlhh4hS

Clase 6:

- **Video** variables aleatorias continuas 1 https://youtu.be/mTQ257amEHw
(duración 26:08)
Empezamos con un ejemplo. Definimos las variables aleatorias absolutamentes continuas. Definimos la función de densidad. Variable aleatoria continua. Propiedades de la densidad. Relación entre la función de densidad y la función de distribución acumulada. Definimos el cuantil o percentil.

  Actividad: Resolver el ejercicio 4.1

- **Video** variables aleatorias continuas 2 https://youtu.be/rYkRH4dyfqQ
(duración 22:12) **nuevo video (reenumeramos los siguientes videos para que la numeración quede consecutiva)**
Intentamos responder a una pregunta natural. ¿Cuánto pueden diferir dos versiones de la función de densidad de una variable aleatoria? Para contestarla definimos conjuntos de medida cero y presentamos dos proposiciones: toda variable continua le da probabilidad cero a todo conjunto boreliano de medida cero, y dos versiones distintas de la densidad pueden discrepar, a lo sumo, en un conjunto de medida cero. Terminamos con la definición de un conjunto de medida cero en R^k.

  Actividad: Luego les propongo ver los dos siguientes videos que corresponden a la materia Estadística para Quimicos de la facultad, realizados por Mariela Sued. En ella habla de varianza y covarianza, temas que veremos más adelante, pero pueden saltear esas partes. Considero que son una muy muy buena introducción para los temas que siguen:
  - **Video** sobre la distribución uniforme: https://www.youtube.com/watch?v=FAevh_D8Qn0
  - **Video** sobre la distribución exponencial: https://youtu.be/In7ArRW66NE

- **Video** variables aleatorias continuas 3 https://youtu.be/vk1_Pp9jUjg
(duración 13:43)
Distribución uniforme, densidad y función de distribución acumulada. Distribución normal estándar. Probamos que la densidad integra 1.
Actividad: Resolver el ejercicio 4.2 y el ejercicio 4.3

- **Video** variables aleatorias continuas 4 https://youtu.be/8ntDI8az9dw
(duración 16:55)
Resolvemos el Ejercicio 4.3, que nos permite introducir las distribuciones normales con parámetros arbitrarios. Mostramos que la transformación lineal de una variable aleatoria con distribución normal sigue teniendo distribución normal, calculando los parámetros. Estandarización de la normal, y cálculo de probabilidades relacionándolas con la distribución normal estándar. Relación entre los cuantiles de las distribuciónnormal estándar y la normal de parámetros arbitrarios. Mostramos cómo hacer las cuentas en R.
Actividad: Probar el Lema 4.5 para alfa negativo y comprobar que la densidad obtenida es la que tiene que ser.

Clase 7:

- **Video** variables aleatorias continuas 5 https://youtu.be/0a0WU4occJM
(duración 22:47)
Distribución exponencial. Función de densidad y de distribución. Enunciamos la Propiedad de falta de memoria de la distribución exponencial, y probamos que la distribución expoinencial es la única variable aleatoria positiva continua que la cumple. Función Gama y propiedades. Distribución gama, con la distribución exponencial y la chi cuadrado con n grados de libertad, como casos particulares de la distribución gama.

- **Video**: variables aleatorias continuas 6 https://youtu.be/DCinLIaQCUQ
(duración 09:48)

Distribución Beta. Estudiamos cómo hallar la distribución de una función de una variable aleatoria, Y=g(X). Definición y propiedades de funciones borelianas.

- **Video**: variables aleatorias continuas 7 https://youtu.be/wwJXPBkJK74
(duración 08:40)
Ejemplos de familias de funciones borelianas.

  Actividad: Resolver el ejemplo 4.7. Sea X una variable (absolutamente) continua con función de densidad f_X. Sea g(x)=exp(x). Hallar la función de densidad de Y=g(X)=exp(X).

Clase 8:

Video: variables aleatorias continuas 8 https://youtu.be/AjBJ4O1YKeU
(duración 31:54)
Resolvemos el Ejemplo 4.7. Teorema de cambio de variables (caso inyectivo y derivable) para una variable aleatoria continua. Ejercicios para estudiar el caso de transformaciones no inyectivas. Inversa generalizada. Definición y propiedades.
Actividad: Probar el Teorema 4.8 para una g decreciente. Resolver los Ejercicios 4.4 y 4.5. Resolver el Ejercicio 4.6.

- **Video**: variables aleatorias continuas 9 https://youtu.be/yuk6MHTNY1w
(duración 43:21)
Resolvemos el Ejercicio 4.6. Generación de números al azar. Probamos la Proposición 4.3 (método de la inversa generalizada) que da un método para generar números al azar. Probamos el Lema 3.4, que dice que las cuatro propiedades que estudiamos de la función de distribución acumulada caracterizan a la función de distribución, hacemos la construcción de una variable aleatoria con dicha distribución a partir de una v.a. con distribución uniforme. Hablamos de números pseudo – aleatorios. Mostramos cómo generar números al azar con el software R. Ejemplo de aplicación del método de la inversa generalizada con dos distribuciones continuas: distribución uniforme y distribución normal. ¿Cómo utilizar el método de la inversa generalizada para generar variables aleatorias con distribución discreta? Lo ejemplificamos con una Bernoulli. Y luego mostramos cómo hacerlo en un caso de distribución discreta más general. Tipos de variables aleatorias: discreta, continua, singular. Terminamos mostrando un ejemplo de combinación convexa de los dos primeros tipos de variables.
Actividad: Hacer toda la Práctica 4.

Capítulo 5: Vectores aleatorios

Link a la lista de reproducción de los videos del capítulo 5
https://youtube.com/playlist?list=PLKjaRXyAL3tFKye0wYe9LJ45R6O5zeG0C

Clase 9:

Video: vectores aleatorios 1 https://youtu.be/3olJnYQ2tI8
(duración 12:15)
Probamos que distintas familias de conjuntos generan a los borelianos de R^k

Video: vectores aleatorios 2 https://youtu.be/-XGNCh00FAI
(duración 26:06)
Terminamos la prueba de que distintas familias de conjuntos generan a los borelianos de R^k. Definimos vectores aleatorios. Probamos que es equivalente a concatenar k variables aleatorias en un vector. Definimos la función de distribución conjunta.

Video: vectores aleatorios 3 https://youtu.be/qVrWtLTLGZA
(duración 23:27)
Enunciamos y probamos las propiedades de la función de distribución conjunta. Caracterización de una función de distribución conjunta. Distribuciones marginales a partir de la conjunta. Cómo obtener la función de distribución de un subvector aleatorio como límite de la función de distribución conjunta.

Video: vectores aleatorios 4 https://youtu.be/ODo3UV-4GM0
(duración 20:28)
Ejemplos de vectores aleatorios. Ejemplo de bolitas de colores en urnas, damos la función de probabilidad puntual conjunta. Ejemplo de variables antropométricas: vemos datos de 246 pacientes e ilustramos scatter plots de varios pares de variables (peso y altura, edad y altura, contorno de pecho y peso) para ilustrar el comportamiento conjunto. Ejemplo de temperatura máxima y mínima de distintas localidades de Argentina, datos del Servicio Meteorológico Nacional, hacemos varios gráficos de dispersión para ilustrar patrones de comportamiento. Ejemplo de un vector aleatorio uniforme., con tiempos de encuentro.

Clase 10:

Video: vectores aleatorios 5 https://youtu.be/vEOPClXvZ64
(duración 22:46)
Independencia de variables aleatorias. Relación con la definición de independencia de eventos. Escribimos la definición de independencia de variables aleatorias en términos de la función de distribución acumulada conjunta. Definición de vectores aleatorios independientes. Transformaciones continuas de vectores aleatorios. Probamos que la independencia de vectores o variables se mantiene por transformaciones.

Actividad: Probar el Lema 5.4

Video: vectores aleatorios 6 https://youtu.be/oe0GwWlzRnQ
(duración 26:57)
Vectores aleatorias discretos. Rango y función de probabilidad puntual conjunta de un vector aleatorio discreto. Cómo obtener la función de probabiliad puntual marginal a partir de ella. Función de distribución conjunta. Definición de independencia para un vector aleatorio discreto, y formas equivalentes de escribirlo.

Actividad: Ejercicio 5.1 (Salario)

Video: vectores aleatorios 7 https://youtu.be/RyKMT3OEEMY
(duración 21:25)
Comenzamos resolviendo el ejercicio 5.1, calculando funciones de probabilidad puntual a partir de la conjunta y respondiendo preguntas sobre independencia de las variables. Presentamos la distribución Multinomial: rango del vector aleatorio, función de probabilidad puntual conjunta y marginales.

Video: vectores aleatorios 8 https://youtu.be/ugd4tt2kc2c
(duración 7:31)
Vectores aleatorios (absolutamente) continuos. Definición de función de densidad conjunta. Cálculo de probabilidades para un vector aleatorio absolutamente continuo.

Actividad: resolver el Ejercicio 5.2 (densidad conjunta y cálculo de probabilidades)

Video: vectores aleatorios 9 https://youtu.be/QUT01_RIHkA
(duración 10:46)
Intentamos responder a la misma pregunta de la que nos ocupamos cuando trabajamos con variables aleatorias continuas, pero ahora en el caso de vectores aleatorios. ¿Cuánto pueden diferir dos versiones de la función de densidad de un vector aleatorio continuo k-dimensional? Obtenemos la misma respuesta que en el caso de variables. La densidad de un vector aleatorio queda definida salvo en conjutnos de medida cero. Además, la probabilidad de que un vector aleatorio continuo pertenezca a cualquier boreliano de medida nula es cero. Terminamos recordando la definición de un conjunto de medida cero en R^k, y exhibiendo varios ejemplos de conjuntos de medida cero.

Video: vectores aleatorios 10 https://youtu.be/VGXhal58xlo
(duración 16:01)
Mostramos cómo obtener la función de densidad marginal de una variable a partir de la densidad conjunta del vector aleatorio. Distribución uniforme de un vector aleatorio. Equivalencias para la definición de independencia de un vector aleatorio absolutamente continuo.

Actividad: Resolver el Ejercicio 5.3 (distribución uniforme).

Clase 11:

Video: vectores aleatorios 11 https://youtu.be/mlWJMr7pzcU
(duración 26:00)
Soporte de un vector aleatorio absolutamente continuo. Propiedades del soporte cuando el vector aleatorio continuo tiene coordenadas independientes. Resumimos el vínculo entre variables aleatorias discretas y el vector aleatorio que las tiene por coordenadas. Y también presentamos el caso continuo.

Actividad: Resolver los Ejercicio 5.4 y 5.5 (independencia de variables aleatorias continuas).

Video: vectores aleatorios 12 https://youtu.be/_i-RihgF2S8
(duración 20:16)
Definimos las funciones borelianas. Estudiamos las distribuciones de las funciones borelianas de vectores aleatorios, separando caso discreto y caso continuo. Teorema de cambio de variables: caso

inyectivo y no inyectivo. Lo aplicamos en particular a la suma de variables aleatorias probando el caso discreto.

Video: vectores aleatorios 13 https://youtu.be/cUcbJ1s56Ks
(duración 11:01)
Calculamos la densidad de la suma de dos variables aleatorias continuas a partir de la densidad conjunta de ambas.

Actividad: Resolver el Ejercicio 5.6 (suma de variables independientes con distribución gama) y el Ejercicio 5.7 (de aplicación del Teorema de Cambio de Variables)

Video: vectores aleatorios 14 https://youtu.be/-eWd_Vt2vSE
(duración 20:56)
Hacemos un ejemplo de aplicación del Teorema 5.10: Cambio de variables, caso no inyectivo, que involucra dos normales independientes. Aprovechamos para repasar el hecho de que una densidad conjunta queda determinada excepto en un conjunto de medida cero.

Video: vectores aleatorios 15 https://youtu.be/oiSGjLWJXZg
(duración 21:30)
Distribución normal bivariada. Presentamos su densidad conjunta. La graficamos. Calculamos las densidades marginales.

Video: vectores aleatorios 16 https://youtu.be/NPLY9zzbNHE
(duración 22:05)
Independencia en la normal bivariada: condiciones sobre los parámetros de la normal bivariada que nos garantiza la independencia de ambas coordenadas del vector aleatorio. Distribución normal multivariada. Otros resultados importantes de la normal: combinaciones lineales de variables normales independientes es normal. Presentamos la densidad t de Student haciendo un cambio de variables. Presentamos los estadísticos de orden.

Video: vectores aleatorios 17 https://youtu.be/DQCj18mOdks
(duración 17:32)
Volvemos a discutir por qué la distribución del mínimo de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas no es la misma que la de cada una de las variables aleatorias a través de un ejemplo muy simple con n=3, María y sus bebés. Aprovechamos el ejemplo para hacer una construcción conjunta de tres variables aleatorias en el mismo espacio de probabilidad, es decir, un coupling o acoplamiento de ellas.

Actividad: Resolver el ejecicio 5.8 (acoplamiento y mínimo). Resolver toda la Práctica 5.

Capítulo 6: Esperanza, varianza y covarianza

Total 198:46 minutos, es decir, 3:18 horas

Link a la lista de reproducción de los videos del capítulo 6
https://youtube.com/playlist?list=PLKjaRXyAL3tGHreKaiIh74DBbzoZ3O5sa

Clase 12: videos 1 al 9

Video: esperanza 1 https://youtu.be/GKdl8h8pOhE
(duración 23:34)
Motivación para la definición de esperanza: intuitivamente puede pensarse como límite de promedios en muchas repeticiones. Definición de esperanza de una variable aleatoria discreta. Segunda interpretación de la esperanza: como centro de masa. Cálculo de la esperanza de una Bernoulli y de una indicadora.

Actividad: Calcular la esperanza de una distribución geométrica de parámetro p. Sugerencia: una serie de potencias se puede derivar dentro de su radio de convergencia, y la derivada coincide con la serie de derivadas.

Video: esperanza 2 https://youtu.be/NJCNVuIMK44
(duración 10:10)
Calculamos la esperanza de una v.a. geométrica. Ejemplos de variable aleatoria discreta con esperanza infinita y sin esperanza. Definición de esperanza de una variable aleatoria continua.

Video: esperanza 3 https://youtu.be/Es2Nfxro7nY
(duración 17:34)
Para entender la definición de esperanza en el caso continuo y relacionarla con la definición dada para una v.a. discreta, veamos una construcción en la que una variables (absolutamente) continua se puede escribir como límite (puntual) de una sucesión de v.a. discretas, y mostremos que la esperanza de las discretas aproximan a la esperanza de la v.a. continua. Enunciamos el Teorema que relaciona la esperanza de una variable aleatoria que es función de un vector aleatorio con la función de probabilidad conjunta del vector (en el caso discreto) o la función de densidad conjunta del vector en elcaso continuo.

Video: esperanza 4 https://youtu.be/JWUw-2IMsgs
(duración 9:24)
Hacemos la demostración del teorema que permite calcular la esperanza de una transformación de un vector aleatorio (en el caso discreto). Ejemplos de aplicación de este teorema.

Actividad: Resolver el Ejemplo de los dardos: Se elige un punto al azar (X,Y) con distribución $U(A)$, la distribución uniforme en A, la bola de radio 7 en R^2. Definamos la variable aleatoria D que mide la distancia al centro del tablero. Calcular E(D), el valor esperado de la distancia al centro del tablero.

Video: esperanza 5 https://youtu.be/S0ceAP_MV2k
(duración 6:05)
Calculamos la esperanza de una variable aleatoria, definida como una transformación de un vector aleatorio continuo (ejemplo de los dardos).

Actividad: Resolver el Ejemplo 6.9: Un segmento de longitud uno se corta en dos puntos elegidos al azar. Hallar la longitud esperada del segmento central.

Video: esperanza 6 https://youtu.be/lz1msdkqQ30
(duración 10:23)
Resolvemos el Ejemplo 6.9: calculamos la longitud esperada del segmento central, al elegir dos puntos independientes en el intervalo (0,1).

Video: esperanza 7 https://youtu.be/7wFai1KCSzI
(duración 9:51)
Comenzamos con las propiedades de la esperanza. Linealidad. Monotonía. Hacemos ambas pruebas en el caso discreto.

Video: esperanza 8 https://youtu.be/BcvAU-q1B38
(duración 2:33)
Más propiedades de la esperanza: esperanza de una constante, esperanza del módulo de una v.a.

Clase 13: videos 9 al 13

Video: esperanza 9 https://youtu.be/LlCG-cmqM88
(duración 25:10)
Propiedad de la esperanza del producto de (funciones de) variables aleatorias independientes. Relación entre la esperanza y la función de distribución.

Video: esperanza 10 https://youtu.be/RYinMyaxLEw
(duración 28:46)
Presentamos el tercer enfoque para presentar la esperanza: como la mejor constante que resume a la variable aleatoria X (en el sentido de la pérdida cuadrática). Definimos la varianza (como costo que pagamos al reemplazar a una v.a. por la mejor constante). Propiedades de la varianza: varianza de una constante, fórmula reducida de la varianza, varianza de un cambio de escala de X. Definimos el desvío estándar de una v.a. Calculamos la varianza en dos ejemplos de va discretas. Interpretación de la varianza como medida de dispersión de la v.a. Calculamos esperanza y varianza de una distribución normal.

Video: esperanza 11 https://youtu.be/V8kCpaoWv70
(duración 4:40)
Definimos el espacio L^2(Omega, F, P) de variables aleatorias.

Video: esperanza 12 https://youtu.be/1gzWAekOnUg
(duración 10:11)
Enunciamos y probamos la Desigualdad de Cauchy Schwartz para variables aleatorias en L^2(Omega, F, P). Definimos un producto interno en L^2 usando la esperanza. Probamos que cumple las propiedades de producto interno, y a través de él, definimos una norma en L^2.

Video: esperanza 13 https://youtu.be/KFjwDcvCfCw
(duración 8:32)

Probamos que la norma en L^2 definida satisface la desigualdad triangular. Probamos que efectivamente, en L^2 la esperanza es la constante que mejor aproxima a una variable aleatoria. Definimos la covarianza entre dos variables aleatorias y damos su fórmula reducida. Probamos que la covarianza de dos variables aleatorias independientes es cero. ¿Vale la vuelta?

Actividad: Resolver el Ejercicio 6.1. Sea $X \sim U(-1,1)$. Sea $Y=X^2$. Demuestre que $Cov(X,Y)=0$.
¿Son las variables X e Y independientes?
Sugerencia: calcule $P(X>1/2, Y<1/4)$.

Clase 14: video 14

Video: esperanza14 https://youtu.be/QpEsPVrmKP8
(duración 31:53)
Interpretación del signo de la covarianza entre X e Y. Enunciamos y probamos las propiedades de la covarianza. Entre ellas, probamos Cauchy-Schwartz para covarianzas. Calculamos la covarianza para la normal bivariada. Definimos el coeficiente de correlación entre v.a. Y probamos sus propiedades.

Actividad: Resolver los Ejercicios 6.2 y 6.3 y 6.4. y 6.5
Ejercicio 6.2. Escribir la fórmula de $V(X-Y)$.
Ejercicio 6.3. Usar la propiedad 7 para calcular la varianza de una $X \sim Bi(n,p)$.
Ejercicio 6.4. Probar el Lema 6.16, es decir, que la correlación es invariante por cambios de escala.
Ejercicio 6.5. A partir del cálculo de covarianza para la normal bivariada realizado en el video, deducir la correlación entre ellas.

Actividad: Resolver toda la Práctica 6

Clase 15: repaso

Clase 16: primer parcial, entran las prácticas y capítulos 1 al 6.

Capítulo 7: Desigualdades y convergencia. Ley de los Grandes Números

Link a los videos del capítulo 7
https://youtube.com/playlist?list=PLKjaRXyAL3tG-IdfHEsuGu8jdCHiXYmpv

Clase 17: videos 1 al 5 de convergencia

Video: convergencia1 https://youtu.be/k9Bw5vHopWA
(duración 23:18)
Desigualdad de Markov. Desigualdad de Chebychev. Aplicaciones a la interpretación del desvío estándar como medida de dispersión. Desigualdad de Jensen.

Video: convergencia2 https://youtu.be/d40DaAz5p7s
(duración 11:33)
Paseos al azar, presentación. Nos preguntamos si está bien definida la variable aleatoria: última visita al origen.

Video: convergencia3 https://youtu.be/qd45yfbGzVY
(duración 35:48)
Definición de límite superior y límite inferior de una sucesión de eventos. Ejemlificamos con paseos al azar, y retornos al origen. Estudiamos propiedades del límite superior e inferior. Enunciamos y probamos el Lema de Borel – Cantelli, y también lo ejemplificamos con retornos al origen.

Video: convergencia4 https://youtu.be/zqWmcHYeES8
(duración 18:31)
Definimos convergencia casi segura o en casi todo punto. Vemos condiciones equivalentes a la convergencia casi segura en el Lema 7.4. Y luego, en el Lema 4.5 probamos condiciones que la garantizan.

Video: convergencia5 https://youtu.be/QTXCl1ub21Q
(duración 26:22)
Definimos convergencia en probabilidad. Vemos cómo se relaciona con la convergencia casi segura en la Proposición 7.4. Y vemos un ejemplo de que la recíproca es falsa, en el Ejemplo 7.2. Definimos la convergencia en distribución. Relacionamos la convergencia en distribución con las demás definiciones de convergencia (casi segura y en probabilidad) en la Proposición 7.5. Finalmente mostramos con el Ejemplo 7.4 que la recíproca no es cierta.

Actividad: Resolver ejercicios del 1 al 6 de la Práctica 7. Pensar el ej 9 (es difícil). Resolver los ejercicios 10a), 11 y 12. Ej 19a) y 20a)

Clase 18: videos 6 al 11

Video: convergencia6 https://youtu.be/_Xtj8xDpkaA
(duración 13:53)
Definimos espacio Lp y convergencia en Lp. Comentamos la contención: Lp contiene a Lq si p es menor que q. La Proposición 7.6 prueba que la convergencia en Lp implica la convergencia en probabilidad. Resumimos la jerarquía de las convergencias en un cuadro. El Ejemplo 7.5 muestra otra sucesión que converge en probabilidad pero no casi seguramente.

Video: convergencia7 https://youtu.be/2owv8pfCmSQ
(duración 21:49)
Proponemos algunas recíprocas parciales a la jerarquía de convergencias, agregando supuestos. Probamos el Teorema de la convergencia acotada. Probamos la implicación de la convergencia entre Lp y Lq. Probamos que si una sucesión converge en Lp para algún p mayor o igual a 1, entonces la sucesión dada por sus esperanzas también converge. Probamos que si una sucesión convergen en probabilidad, entonces existe una subsucesión que converge casi seguramente. Enunciamos el teorema sub sub, que da una equivalencia de la convergencia en probabilidad en términos de convergencias de subsucesiones. La prueba es un ejercicio de la Práctica 7 de la materia.
Actividad: Resolver el Ejercicio 7.1

Video: convergencia8   https://youtu.be/85k5mlh_dkw
(duración 23:26)
Enunciamos y probamos el Teorema de representación Skorokhod, que relaciona convergencia en distribución con una convergenica casi segura. Para eso definimos el Lema 7.13 y el Corolario 7.14, que son muy técnicos. Finalmente hacemos la prueba del Teorema de Skorkhod y la ilustramos con un gráfico del libro de Thorisson.

Video: convergencia9 https://youtu.be/x9BqOjoHYpE
(duración 17:16)
Probamos el Lema 7.16, que dice que si una sucesión converge en distribución a una constante, entonces también converge en probabilidad. Repasamos la jerarquía de las convergencias y repasamos las recíprocas parciales. Definimos la convergencia casi segura y en probabilidad de vectores aleatorias. En la Proposición 7.8 relacionamos estas nociones vectoriales con la convergencia coordenada a coordenada de cada una de las variables.

Actividad: Probar el ítem (i) de la Proposición 7.8, usando las sugerencias.

Video: convergencia10 https://youtu.be/66L9Q4VQu7M
(duración 20:33)
Vemos cómo las funciones continuas preservan las convergencias, en el Teorema 7.17. Como corolario, probamos que la convergencia en probabilidad y casi segura son preservadas por la suma y el producto. Y también hablamos de la preservación de la convergencia en distribución al sumar o multiplicar por una constante. Definimos acotado en probabilidad (o tight). Enunciamos varios resultados relacionados con la acotación en probabilidad en los Lemas 19 a 21: si una sucesión converge en distribución o en probabilidad entonces es acotada en probabilidad, el producto de una sucesión acotada en probabilidad por otra que converge a cero en probabilidad también converge a cero en probabilidad.

Actividad: Probar la Observación 7.2 y el Ejercicio 7.2. Probar el Lema 7.19 (si una sucesión converge en probabilidad, entonces es acotada en probabilidad) y el Lema 7.20 (ídem con convergencia en distribución).

Video: convergencia11 https://youtu.be/LO3DmS-gw1Q
(duración 5:10)
Enunciamos y empezamos a probar el Teorema de Slutzky.

Clase 19: Son los videos 12 al 15. El pdf convergenciasegundaparte tiene el contenido del video 12, los restantes videos de este tema se encuentran en convergenciaterceraparte.pdf.

Video: convergencia12 https://youtu.be/7HToTSpi5O8
(duración 20:33)
Terminamos de probar el Teorema de Slutzky. Probamos y enunciamos el Teorema 7.23 que da una caracterización de la convergencia en distribución en términos de la convergencia de las esperanzas.

(archivo convergenciasegundaparte.pdf)

Video: convergencia13 https://youtu.be/WM879cWT750
(duración 36:52)

Discutimos la intuición de la Ley de los Grandes Números. Enunciamos y probamos la Ley Débil de los Grandes Números. Enunciamos la Ley Fuerte de los Grandes Números para vaiid con varianza finita.

Video: convergencia14 https://youtu.be/bhNVtNVCyS8
(duración 14:01)
Probamos la Ley Fuerte de los Grandes Números para vaiid con varianza finita.

Video: convergencia15 https://youtu.be/UVhbqvqG-bs
(duración 23:46)
Hacemos una serie de comentarios sobre la LGN. Qué pasa en el caso iid cuando no tenemos segundo momento finito, o primer momento finito. Damos una primera aplicación de la LGN: una demostración constructiva del Teorema de Weierstrass, usando polinomios de Bernstein, de que los polinomios son densos en el conjunto de funciones continuas del intervalo [0,1] con norma del supremo.

Clase 20: Son los videos 16 al 19. Se acompaña de dos scripts de R: montecarloparaintegrales.R y generar2020.R. Además hay una version html de este ultimo archivo, que se llama generar_2020.html tambien subida en esta carpeta, como se explica en el video convergencia19.

Video: convergencia16 https://youtu.be/atqSsbbkiJY
(duración 18:18)
Segundo ejemplo de aplicación de la LGN: calculamos integrales definidas en forma aproximada (Método de Monte Carlo). Ejemplificamos con un cálculo usando la densidad normal en R. Empezamos con un tercer ejemplo: cálculo de probabilidades.

Video: convergencia17 https://youtu.be/JUXjd-tnARE
(duración 17:06)
Aproximamos la probabilidad de que la suma de dos dados equilibrados dé 8. Hacemos una descripción detallada y comentada de un script de R. (generar2020.R)

Video: convergencia18 https://youtu.be/whov7lS7Suo
(duración 17:06)
Aproximamos la probabilidad de que en un grupo de r=23 y de r=30 personas no haya dos o más que cumplan el mismo día. Discutimos cómo presentar los resultados obtenidos.

Video: convergencia19 https://youtu.be/xvMeSLZMkAc
(duración 2:29)
Presentamos el Rmarkdown del mismo ejemplo discutido más arriba, de los cumpleaños.

Actividad: terminar toda la Práctica 7.

Capítulo 8: Teorema Central del Límite

Link a la lista de reproducción de los videos del capítulo 8
https://youtube.com/playlist?list=PLKjaRXyAL3tHsPuQkRAVUlwhSCG65vcbV

Clase 21: Los videos *teorema central 1 a 5*, y el video *teorema central 5 y medio complemento*, se corresponden con el archivo teoremacentral.pdf

Video: teorema central 1 https://youtu.be/PGkIxJy0YuM
(duración 18:14)
En camino al Teorema Central del Límite (TCL). Retomamos las simulaciones que realizamos para ejemplificar la LGN, a través de los histogramas. Cambiamos la escala para notar que aparece la curva normal cuando un mira la distribución aproximada del promedio de muchas variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Recordamos las herramientas previas que son necesarias para la prueba del TCL: caracterizaciones de la convergencia en distribución y propiedades de la combinación lineal de variables normales independientes. Además discutimos la estandarización de sumas y promedios de variables aleatorias.

Video: teorema central 2 https://youtu.be/RRPpH0e1yeI
(duración 25:08)
Enunciamos y probamos el Teorema Central del Límite. Discutimos su significado y damos la prueba debida a Lindeberg, que no usa la función característica.

Video: teorema central 3 https://youtu.be/hmoQZ_bT7b0
(duración 25:48)
Comentarios sobre el TCL. ¿Qué es lo que aproxima el TCL? ¿Variables o probabilidades? ¿Cuál es la cualidad de la normal estándar que produce que el límite resultante tenga esta distribución? ¿Qué magnitud de error estamos cometiendo cuando aproximamos usando el TCL? El Teorema de Berry-Esséen da una respuesta. También discutimos cómo se compatibilizan los dos resultados importantes de esta materia: la LGN y el TCL. Finalmente discutimos si el supuesto de varianza finita es necesario para que valga el TCL. Mostramos distintas notaciones para escribir el TCL. Finalmente discutimos el TCL para vectores aleatorios: para ello, previamente, definimos la convergencia en distribución de vectores aleatorios.

Video: teorema central 4 https://youtu.be/kBK-w8ZURLs
(duración 09:37)
Mostramos aplicaciones del TCL: 1) Cuando las v.a. Xi tienen distribución Bernoull, 2) Aplicación de binomiales: tablero de Galton

Video: teorema central 5 https://youtu.be/Gnj2rAp6C9Q
(duración 37:00)
Seguimos con las aplicaciones del TCL: 3) Aplicación de binomiales: ejemplo con la ruleta, 4) Errores de medición, 5) Xi con distribución U(-1,1).

Video: teorema central 5 y medio (complemento) https://youtu.be/4UjsvC37WOw
(duración 07:04)

Proponemos y comentamos el Ejercicio 8A que metriza la convergencia en probabilidad. Además, recordamos una equivalencia para caracterizar límites a través de sucesiones en espacios métricos, que será útil para algun par de resultados de funciones características de la clase próxima.

Actividad: hacer el Ejercicio 8a, que propone una métrica para la convergencia en probabilidad.

Clase 22: Los videos *teorema central 6 a 11* introducen las funciones características y prueban sus propiedades. Se corresponden con el archivo "teoremacentralsegunda.pdf" y completan los resultados teóricos necesarios para la práctica 8.

Video: teorema central 6 https://youtu.be/lFEtN9sBa_I
(duración 25:39)
Definimos la función característica. Antes de estudiarla en cierto detalle, recordamos propiedades de los números complejos. En el Lema 8.1, mostramos una cota que involucra integrales que usaremos para acotar el resto del polinomio de Taylor, más adelante.

Video: teorema central 7 https://youtu.be/jybhOiwBGOY
(duración 30:42)
Comenzamos enunciando y probando propiedades técnicas de la función característica. Calculamos la función característica de la normal estándar. Y también de la variable aleatoria discreta que toma los valores -1 y 1 con probabilidad ½ cada uno. Enunciamos y probamos el Teorema 8.3 que permite encontrar la función característica de la suma de dos variables aleatorias independientes a partir de las funciones características de ambas variables aleatorias.

Actividad: Probar Lema 8.2 ítems (3) y (4). Y resolver el Ejercicio 8.1 que propone calcular la función característica de las distribuciones Poisson y exponencial.

Video: teorema central 8 https://youtu.be/QJs_p-5LMaE
(duración 30:03)
Estudiamos la relación entre la función característica de una variable aleatoria y sus momentos, en la Proposición 8.1. Para eso probamos primero un resultado cuya prueba nos había quedado pendiente en el capítulo anterior: la inclusión Lq contenido en Lp con $p < q$ (ambos mayores o iguales a 1). Enunciamos el Teorema de la Convergencia Mayorada (sin demostración). Luego de probar el vínculo entre momentos y función característica, ejemplificamos este resultado con la distribución normal. Finalmente, en la Proposición 8.2 hacemos el desarrollo de Taylor de la función característica, y acotamos el resto.

Video: teorema central 9 https://youtu.be/5tfwdR_tkEg
(duración 22:13)
Enunciamos el Teorema (o fórmula) de inversión. Hacemos la prueba para el caso de variables continuas. Probamos el Teorema 8.6 que nos dice que si las funciones características de dos variables aleatorias coinciden, entonces sus funciones de distribución coinciden (*las funciones características caracterizan la distribución*). Enunciamos y probamos el Teorema de Inversión de Fourier para las variables aleatorias absolutamente continuas. Aplicamos el Teorema de Inversión de Fourier a la distribución normal.

Video: teorema central 10 https://youtu.be/NgvueM04Y_s

(duración 12:21)
¿Cómo usamos las funciones características para probar el TCL? Presentamos el Teorema 8.8, que se denomina Teorema de Continuidad de Paul Levy, que relaciona la convergencia en distribución con la convergencia de las funciones características. Probamos una de las dos implicaciones de este teorema, y damos una referencia para que el lector interesado la busque. Finalmente, presentamos unos ejercicios para practicar.

Actividad: Resolver el Ejercicio 8.2: que nos pide probar el TCL usando funciones características, combinando varios de los resultados enunciados en la teórica. Resolver el Ejercicio 8.3, la prueba de la LGN. Resolver ejercicios que son aplicaciones del TCL, el Ejercicio 8.4 que presenta la convergencia de la varianza muestral, el Ejercicio 8.5 que describe el método delta o el método de propagación de errores para variables transformadas, y el Ejercicio 8.6 que es una aplicación de la propagación de errores.

Video: teorema central 11 https://youtu.be/dGYGzRCylNw
(duración 6:51)
Discutimos en la Proposición 8.3 un resultado que permite deducir, que la convergencia en distribución es preservada por la suma, siempre que se cumpla el supuesto de independencia de las variables que sumamos. Lo discutimos como aplicación del Teorema de Continuidad.

Actividad: Resolver toda la Práctica 8.

Capítulo 9: Esperanza Condicional

Link a la lista de reproducción de los videos del capítulo 9
https://youtube.com/playlist?list=PLKjaRXyAL3tG1NrM_ioFUjInyPZx1pWt9

Los videos 1 a 13 se basan en el archivo esperanzacondicional.pdf, el archivo que contiene los ejercicios de la teórica es ejerciciosT9a.pdf.

Clase 23: Los videos *esperanza condicional 1 a 8*

Video: esperanza condicional 1 https://youtu.be/oNxHSF_NZPk
(duración 14:26)
Presentamos el problema de predicción de variables aleatorias, comenzamos recordando el espacio L2 y las nociones de producto interno, igualdad entre variables y norma de una variable que presentamos en el Capítulo 6 y que retomamos en el Capítulo 7 y 8. Definimos error cuadrático medio como función a optimizar y definimos mejor predictor con ese criterio. Terminamos el video probando el Teorema 9.1 que da una condición que garantiza haber hallado un predictor óptimo.

Video: esperanza condicional 2 https://youtu.be/N4g45cA0h0M
(duración 20:22)
Comenzamos encontrando condiciones que debe cumplir el óptimo lineal como predictor de una variable aleatoria en un subespacio de dimensión finita, en el Teorema 9.2. Después calculamos los predictores óptimos de una variable aleatoria Y en la clase de los predictores constantes y en la clase de los predictores que son funciones lineales de una variable X. Y calculamos el costo involucrado (en términos del error cuadrático medio) al cambiar a Y por su predictor, en el caso del óptimo constante y en el caso del óptimo lineal. Relacionamos lo obtenido con el significado del coeficiente de correlación entre las variables X e Y.

Video: esperanza condicional 3 https://youtu.be/32SSDnURWck
(duración 15:57)
Comenzamos con un ejemplo para calcular el óptimo lineal, cuando la distribución conjunta del vector (X,Y) es uniforme en un paralelogramo. Lo relacionamos con el costo involucrado, con el coeficiente de correlación entre ambas variables y con la covarianza. Como ejemplo motivador construimos con detalle el mejor predictor (posible) de Y a partir de X cuando X es una variable aleatoria discreta (de rango finito). Hacemos todas las cuentas del cálculo del predictor en el caso en el que Y también es una v.a. discreta.

Video: esperanza condicional 4 https://youtu.be/YEqdiBk1Jsc
(duración 05:05)
Predicción en el caso general: enunciamos y probamos la Proposición 9.1 que garantiza la unicidad del mejor predictor.

Video: esperanza condicional 5 https://youtu.be/mYp6PMnepXI
(duración 09:51)
Enunciamos y discutimos la prueba del Teorema 9.3 que garantizan existencia y unicidad del mejor predictor de Y basado en X. Luego definimos la esperanza condiciona de Y dado X como este predictor. Discutimos su notación. Damos el Teorema 9.4 que establece la principal propiedad que cumple la esperanza condicional, la ilustramos gráficamente.

Video: esperanza condicional 6 https://youtu.be/46QM6y-9PG4
(duración 10:19)
Enunciamos y probamos más propiedades de la esperanza condicional.

Video: esperanza condicional 7 https://youtu.be/wuiccU1Lung
(duración 15:46)
Definimos las distribuciones condicionales. En el caso (X,Y) discreto, definimos la función de probabilidad puntual condicional y la esperanza condicional. Luego comprobamos que con esa defínción obtenemos el mejor predictor de cualquier función g(X,Y) basado en X, para el vector discreto.

Video: esperanza condicional 8 https://youtu.be/RhI-w3Ss9vE
(duración 15:49)
En el caso (X,Y) continuo, definimos la función de densidad condicional de Y dado X=x y la esperanza condicional. Luego comprobamos que con esa defínción obtenemos el mejor predictor de cualquier función g(X,Y) basado en X, para el vector (X,Y) continuo. También damos la definición de esperanza condicional en el caso de conocer la distribución condicional, generalizando así los casos discretos y

continuos que vimos. Como aplicación de estas fórmulas definimos la probabilidad condicional de un evento y la varianza condicional. Damos propiedades de la varianza condicional.

Actividad: Probar la Proposición 9.5. Probar también las propiedades de la varianza condicional enunciadas en los Lemas 9.8 y 9.9 que son ejercicios de la Práctica 9.

Clase 24: Los videos *esperanza condicional 9 a 13*

Video: esperanza condicional 9 https://youtu.be/wn36Y2PQvSI
(duración 29:07)
Damos ejemplos de esperanza condicional. El Ejemplo 9.2 basado en datos reales del año 2009 sobre salarios en EE.UU. (vector aleatorio discreto). Luego retomamos a la distribución normal bivariada (vector aleatorio continuo) para ver cómo son las distribuciones y esperanzas condicionales en este caso.

Actividad: Resolver el Ejercicio 9.1 sobre un vector aleatorio (X,Y) con distribución uniforme en un paralelogramo.

Video: esperanza condicional 10 https://youtu.be/9QRsj_Ei4YI
(duración 14:42)
Seguimos con un ejemplo de esperanza condicional. En este caso calculamos tanto E(X|Y) como E(Y|X) en un caso donde Y es una v.a. absolutamente continua y X es una función de Y tal que resulta ser una v.a. ni discreta ni continua. Construimos intuitivamente a la esperanza condicional y probamos que el resultado conjeturado nos da el mejor predictor (cumpliendo la definición de esperanza condicional).

Video: esperanza condicional 11 https://youtu.be/sktIKZuCCwg
(duración 38:12)
Presentamos el Ejemplo 9.5. En este caso, la distribución de X es discreta, y la distribución de Y condicional a X es continua, con parámetros que dependen de X. Probamos que como resultado de esta construcción obtenemos una variable Y que resulta continua, y su distribución termina siendo una mezcla de distribuciones. Calculamos distintas probabilidades, esperanzas y esperanzas condicionales y damos una interpretación de la relevancia de este ejemplo. En el video, mencionamos un ejemplo desarrollado en clase práctica que es de naturaleza inversa: en ese caso la distribución de X es continua y la distribución condicional de Y dado X es discreta.

Link a la clase de Manuel a la que se hace referencia en el video.
https://www.youtube.com/watch?v=R7ZvyUSvW_Y&list=PLmA5emcpE2c1RGHiXQ8oaK8qMTiN3fmLr&index=3

Video: esperanza condicional 12 https://youtu.be/cHFMKBnK550
(duración 21:48)
Para terminar este capítulo introducimos el concepto de distribución y esperanza condicional a un vector aleatorio. Damos las definiciones y propiedades. Completamos la exposición con un ejemplo de datos reales, retomando la base de datos del año 2009 sobre salarios en EE.UU, esta vez considerando a la variable salario como continua, y sacando conclusiones sobre el salario por hora de la población encuestada. Estudiamos cómo depende de la cantidad de años de estudio y del género.

Video: esperanza condicional 13 https://youtu.be/iK8XLnbhlfA

(duración 12:13)
Proponemos 2 ejercicios para hallar las distribuciones condicional y marginal a partir de conocer la otra condicional y la marginal, dos “especies de Bayes”, para vectores aleatorios bidimensionales con una variable continua y otra discreta. Luego de hacer un par de comentarios, proponemos dos aplicaciones directas de estos ejercicios.

Actividad: Hacer los ejercicios 9.2 a 9.5 de la teórica. Resolver toda la Práctica 9.

Capítulo 10: Estadística

Link a la lista de reproducción de los videos del capítulo 10
https://youtube.com/playlist?list=PLKjaRXyAL3tEEkJdC1xUe2k22basGNP9o

Los videos 1, 2 y 3 se corresponden con el 10estadistica.pdf, y presentan la estadistica, junto con estimación puntual y las propiedades de los estimadores. El video 4 presenta el método de máxima verosimilitud y se corresponde con el 10estadisticasegundaparte.pdf.

El archivo que contiene los ejercicios de la teórica es ejerciciosT10.pdf.

Clase 25: (estimación puntual) Los videos *estadistica 1 a 4.*

Video: Estadística 1 https://youtu.be/EQHqDl650x0
(duración 7:17)
Presentamos el problema del que se ocupa la estadística. Y las tres maneras en las que da respuestas: estimación puntual, intervalos de confianza y tests de hipótesis.

Video: Estadística 2 https://youtu.be/i8FBYsLhLXs
(duración 18:03)
Damos dos ejemplos: control de calidad y estimación de la media, que analizamos en forma intuitiva. Definimos modelo estadístico, modelo paramétrico, parámetro, espacio de parámetros, muestra aleatoria, estadístico, estimador.

Video: Estadística 3 https://youtu.be/VeSlm88Fah8
Trabajamos con el ejemplo de estimar el rango de un generador de números al azar. Proponemos dos estimadores. Presentamos propiedades y características de los estimadores, para compararlos. Estimador insesgado, sesgo y varianza. Error cuadrático medio. Estimadores débilmente y fuertemente consistentes.

Actividad: Resolver el Ejercicio 1 que escribe el ECM usando el sesgo y la varianza. Resolver el ejercicio 2, que nos pide corregir un estimador para que resulte insesgado y calcularle el ECM al estimador corregido.

Video: Estadística 4 https://youtu.be/_exZ4-p2qZs
(duración
Hasta ahora presentamos estimadores que surgen de forma intuitiva. En este video presentamos el método de máxima verosimilitud para encontrar estimadores. Comenzamos por un ejemplo. Luego presentamos el estimador de máxima verosimilitud en el caso discreto, a partir de definir la función de verosimilitud en este caso. También presentamos el estimador de máxima verosimilitud en el caso continuo. Para eso introducimos la función de verosimilitud en este caso.

Actividad: Resolver los ejercicios 10.1 al 10.5 enunciados en el video 4.

Clase 26: **(Intervalos de confianza)**:

Comiencen viendo la muy buena clase sobre el tema de intervalos de confianza de Mariela Sued, que es para la materia Estadística (para la licenciatura en Química) de la FCEN - UBA. Dura solamente 10 minutos y está en
https://www.youtube.com/watch?v=kK7bdav1pTw&feature=youtu.be

Comiencen viendo la muy buena clase sobre el tema de intervalos de confianza de Mariela Sued, que es para la materia Estadística (para la licenciatura en Química) de la FCEN - UBA. Dura solamente 10 minutos y está en
https://www.youtube.com/watch?v=kK7bdav1pTw&feature=youtu.be

Los videos 5 al 7 que tratan sobre intervalos de confianza. Se basan en el pdf que se llama 10estadisticaterceraparte.pdf.

Video: Estadistica 5 https://youtu.be/wU0yfnXgNhU
(duración 10:12)
Presentamos los intervalos de confianza. Hablamos del nivel de confianza.

Video: Estadística 6 https://youtu.be/N-USp9pgHYo
(duración 21:04)
Comenzamos con un ejemplo de intervalo de confianza, para la media de una distribución normal, con la varianza conocida. Planteamos la construcción completa y discutimos el significado del intervalo obtenido. Introducimos la noción de pivote Luego cambiamos el nivel de confianza y buscamos el tamaño de muestra para garantizar una cierta longitud prefijada.

Actividad: Responder la pregunta que quedó planteada en el video, respecto de qué pasa cuando aumentamos el nivel de confianza del intervalo. Para ello construir el IC de nivel 0.99 en este ejemplo y compararlo con el que se calcula en el video.

Video: Estadística 7 https://youtu.be/lob85p9POLY
(duración 34:21)
Presentamos los intervalos de confianza asintóticos. Hallamos el intervalo de confianza asintótico para la media de una distribución desconocida. También hallamos el intervalo de confianza asintótico para la probabilidad de éxito en el caso Binomial.

Actividad: Resolver toda la Práctica 10.

Capítulo 11: Procesos de Poisson

Link a la lista de reproducción de los videos del capítulo 11
https://youtube.com/playlist?list=PLKjaRXyAL3tFytq3EAZWT9tlII2C5Fm8G

Clase 27 Los últimos 3 videos de la materia. No entraron en los parciales, pero van al final. Una sola definición, dos teoremas, tres ejercicios. Todo en el archivo 11ProcesosdePoisson.pdf Y les damos las muchas gracias por haber llegado hasta acá.

Video: procesos de poisson 1 https://youtu.be/vNzX3g0_O7w
(Duración 11:16)
Presentamos los procesos de ocurrencias de eventos a lo largo del tiempo. Sólo trabajaremos con los Procesos de Poisson. Damos las 4 propiedades que los caracterizan. Enunciamos el teorema que deduce la distribución Poisson para la cantidad de eventos ocurridos en el intervalo [0,t] a partir de las cuatro propiedades. Finalmente definimos los Procesos de Poisson en el semieje positivo real.

Video: procesos de poisson 2 https://youtu.be/8FH7CvtULOk
(Duración 21:31)
Seguimos con los Procesos de Poisson. Probamos el teorema que deduce la distribución Poisson para la cantidad de eventos ocurridos en el intervalo [0,t] a partir de las cuatro propiedades. Terminamos el video con dos ejemplos: un experimento de medición de emisión de partículas radioactivas realizado en 1920 y el estudio del bombardeo alemán al sur de Londres durante la segunda guerra mundial.

Actividad: Resolver el ejercicio 11.1, sobre el bombardeo al sur de Londres, para decidir si un Proceso de Poisson constituye un buen modelo para el fenómeno.

Video: procesos de poisson 3 https://youtu.be/Hjx0YpwwX6k
(Duración 33:59)
Seguimos con los Procesos de Poisson. Proponemos una formulación alternativa del Proceso de Poisson, a través de estudiar los tiempos hasta la ocurrencia de los eventos y los tiempos entre eventos. Para ello, enunciamos y probamos el teorema que da la distribución conjunta de estos últimos, y escribimos el Proceso de Poisson a partir de ellos. Discutimos diversas formas de generar el Proceso de Poisson, y la manera en la que aparecen naturalmente las distribuciones exponencial, gama y Poisson. Buenas referencias para seguir investigando esto es el apunte de Pablo Ferrari de esta materia, que puede encontrarse en http://mate.dm.uba.ar/~pferrari/clases/TeoricasProbaM2016-Pablo.pdf Para profundizar el tema de procesos estocásticos, muy por encima del nivel de esta materia puede consultarse el libro de Pablo A. Ferrari y Antonio Galves: *Construction ofStochastic Processes, Coupling and Regeneration*, que está en https://docs.ufpr.br/~lucambio/CE222/2S2011/oct2001.pdf
Este es el último video de la materia.

Actividad: Resolver los ejercicios 11.2 y 11.3.

Si les gustó el tema, hay materias optativas regulares y ocasionales tanto de Probabilidades como de Estadística, y una comunidad bastante activa de investigadores y docentes en ambas áreas en la Facultad, repartidos entre el Departamento de Matemática y el Instituto de Cálculo. También muchos seminarios sobre estos temas, acerquense (cuando se pueda…) **¡Los esperamos!**

Clase 28: Repaso

Clase 29 Segundo parcial.