Análisis Complejo - Primer Cuatrimestre de 2021

Práctica N°1. Números complejos, esfera de Riemann y homografías

1. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$:

   (a) $(i + 1)(i - 1)(i + 3)$,
   (b) $\dfrac{2+i}{2-i}$,
   (c) $(1 + i)^{65} + (1 - i)^{65}$,
   (d) $\dfrac{1+i}{i}$,
   (e) $(1 + i)^{100}$,
   (f) $\dfrac{1}{-1+3i}$.

2. Determinar las partes reales e imaginarias de los siguientes números complejos, en términos de las de z:

   (a) z^2,
   (b) z^{-1},
   (c) z^{-2},
   (d) z^4,
   (e) $\dfrac{1+z}{1-z}$,
   (f) $\dfrac{i-z}{1+iz}$,
   (g) $\dfrac{z}{z+1}$,

3. Sean z y w dos números complejos. Demostrar que:

   (a) $\overline{z} = z$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$,
   (b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
   (c) $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$,
   (d) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$,
   (e) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

4. Probar que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $\overline{a}_n X^n + \overline{a}_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0 = 0$. Deducir que si $P(X)$ es un polinomio con coeficientes reales y $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(X)$, entonces $\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$ también lo es.

5. Para $z \in \mathbb{C}$, se define $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Probar que:

   (a) Si $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,
   (b) $|zw| = |z|\,|w|$ y si $w \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$,
   (c) $-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|$ y $-|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z|$,
   (d) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$ y $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$,
   (e) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$,
   (f) $|z + w| \leq |z| + |w|$ y $|z - w| \geq |z| - |w|$.

   Interpretar geométricamente la propiedad (e), también conocida como “Ley del paralelogramo”.

6. Probar que $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $d(z, w) = |z - w|$ es una métrica y en consecuencia $(\mathbb{C}, d)$ es un espacio métrico.

7. Describir geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

(a) $|z-i+3|=5$,

(b) $|z-i+3|\leq 5$,

(c) $\operatorname{Re}(2z+3)\geq 0$,

(d) $\operatorname{Re}((1+2i)z)\geq 0$.

8. Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y sea $c\in\mathbb{C}$, probar que $\alpha z\overline{z}+cz+\overline{cz}+\beta=0$ representa una circunferencia, o una recta, o un punto o al conjunto vacío. Probar además que toda circunferencia o recta puede representarse de esta forma.

9. **Transformaciones lineales y representación matricial de los números complejos.**

   (a) Probar que toda transformación $\mathbb{R}$-lineal $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ puede escribirse de forma única como
   $$T(z)=\mu z+\lambda\overline{z}$$
   donde $\mu,\lambda\in\mathbb{C}$ y determinar estos números en función de T. Probar que T es $\mathbb{C}$-lineal si y solo si $\lambda=0$, y en tal caso, T resulta la multiplicación por $T(1)$.

   (b) Fijemos una matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ con coeficientes reales, y consideremos la transformación $\mathbb{R}$-lineal $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ que define A. Probar que son equivalentes:
   - T es $\mathbb{C}$-lineal,
   - $a_{11}=a_{22}$ y $a_{21}=-a_{12}$.

   y en tal caso T es la multiplicación por $z_A=a_{11}+ia_{21}$.

   (c) Deducir que la asignación del inciso anterior
   $$A\in\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}:\quad a,b\in\mathbb{R}\right\}\mapsto z_A\in\mathbb{C}$$
   define una biyección de modo que $z_{A+B}=z_A+z_B$, $z_{AB}=z_Az_B$ y $z_{Id}=1$. Luego $\mathcal{M}$ resulta un cuerpo, con la suma y la multiplicación usual de matrices, isomorfo a $\mathbb{C}$.

Forma polar y raíces.

10. Para $z\in\mathbb{C}, z=a+bi$, se define $e^z=e^a(\cos b+i\operatorname{sen} b)$.

    (a) Demostrar que para todo $z,w\in\mathbb{C}$, $e^{w+z}=e^we^z$.

    (b) Describir los z tales que $e^z=1$.

    (c) Demostrar que si $e^z=e^w$, entonces existe $k\in\mathbb{Z}$ tal que $z=w+2k\pi i$.

    (d) Probar que para todo $z\in\mathbb{C}$, $e^{\overline{z}}=\overline{e^z}$.

11. (a) Mostrar que si $\alpha=re^{i\theta}$ ($r\in\mathbb{R}_+,\theta\in\mathbb{R}$) es la *forma polar* del complejo α, entonces la transformación lineal T_α del ejercicio 9. se factoriza como una rotación en el plano complejo en el ángulo θ, seguida de una dilatación de factor r. Deducir que T_α preserva los ángulos entre los vectores.

    (b) Hallar todas las transformaciones $\mathbb{R}$-lineales $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ que preservan los ángulos entre los vectores. ¿Son todas de la forma T_α para algún $\alpha\in\mathbb{C}$?

12. (a) Escribir los siguientes números complejos en forma polar:

i. $1+i$, ii. $-5i$, iii. -3.

(b) Escribir los siguientes números complejos en la forma $a+ib$:

i. $3e^{i\frac{\pi}{4}}$, ii. $e^{-i\pi}$, iii. $\pi e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

13. Para $n = 2, 3, 4, 5$, dibujar todos los números complejos z tales que $z^n = 1$.

14. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que hay n números complejos distintos tales que $z^n = \alpha$.

15. Hallar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $iz^2 + (3-i)z - (1+2i) = 0$.

16. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$.

(a) Hallar la imagen por f del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im}(z) < 2\pi\}$.

(b) Hallar la imagen por f del primer cuadrante.

(c) Mostrar que la imagen de la recta $\{t + it \mid t \in \mathbb{R}\}$ es una espiral.

17. (a) Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

(b) Generalizando las igualdades del ítem anterior, se define para $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Comprobar que para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1 \quad \text{y} \quad e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

(c) Mostrar que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen período 2π.

(d) Mostrar que los únicos valores de z para los cuales $\cos z = 0$ y $\operatorname{sen} z = 0$ son los valores reales usuales.

(e) Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$ y $\operatorname{sen}(\overline{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)}$

(f) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\cos z \in \mathbb{R}$ y los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen} z \in \mathbb{R}$.

(g) Probar que $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones suryectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. Hallar todas las soluciones de la ecuación $\cos z = \frac{5}{4}$.

(h) Determinar los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen} z$ es un número real. Hacer lo mismo con cos.

18. Sean $a, b, b' \in \mathbb{R}$. Probar que si $|b| < |b'|$, entonces $|\cos(a+bi)| < |\cos(a+b'i)|$ y $|\operatorname{sen}(a+bi)| < |\operatorname{sen}(a+b'i)|$.

19. Sea $z \neq 1$. Probar que $1 + z + \cdots + z^n = \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}$. Para $0 < \theta < 2\pi$, dar una fórmula para $1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta$.

20. Demostrar que para todo par de números reales positivos a, b, vale que

$$\arctan\left(\frac{1}{a+b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a^2+ab+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{a}\right).$$

Sucesiones de Números Complejos

21. (a) Probar que si $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ entonces $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$.
    (b) Dar un ejemplo donde no valga la recíproca.

22. (a) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| < 1$. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n$? Repetir para $|\alpha| > 1$.
    (b) Si $|\alpha| < 1$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n\right) = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

23. Calcular, en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones:
    (a) $\frac{1}{n}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$,
    (b) $n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$,
    (c) $\cos(n\pi) + i\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right)}{n^2}$,
    (d) $\left(\frac{(-1)^n+1}{3}\right)^n$,
    (e) ni^{2n+1}.

24. Se define el *conjunto de Mandelbrot* como el conjunto $\mathcal{M}$ de los números complejos c tales que la sucesión definida de manera recursiva del siguiente modo:
$$z_0 = c, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c,$$
resulta acotada. Demostrar que $\mathcal{M} \subset \{|z| \le 2\}$.

Plano Complejo ampliado y esfera de Riemann.

25. Sean $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y $S = S^2$ (la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio 1 y centro en $(0,0,0)$). Sea $N = (0,0,1) \in S$, definimos la proyección estereográfica $\theta : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ de la siguiente manera: $\theta(N) = \infty$ y dado $P \in S \setminus \{N\}$, $\theta(P) = a + ib$ si y solo si $(a, b, 0)$ es el punto de intersección de la recta $\overline{NP} \subset \mathbb{R}^3$ con el plano $x_3 = 0$.
    (a) Probar que $\theta(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ si $(x_1, x_2, x_3) \neq N$.
    (b) Probar que θ es una biyección y su inversa φ está dada por
$$\varphi(z) = \frac{1}{1+|z|^2}\left(2\operatorname{Re}(z), 2\operatorname{Im}(z), |z|^2 - 1\right).$$
    (c) Calcular $\varphi\big(\operatorname{Re}(z) = 0\big)$ y $\varphi\big(\operatorname{Im}(z) = 0\big)$.

26. Sea $\overline{d}$ la distancia en $\widehat{\mathbb{C}}$ inducida por la distancia de $\mathbb{R}^3$ vía θ, es decir, si $z, z' \in \widehat{\mathbb{C}}$, definimos $\overline{d}(z, z') = \|\varphi(z) - \varphi(z')\|$ donde $\|a\|$ representa la norma usual del vector a en $\mathbb{R}^3$.
    (a) Verificar que $\overline{d}$ es una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que $\overline{d}$ restringida a $\mathbb{C}$ es equivalente a la métrica usual (probando, por ejemplo, que $(\mathbb{C}, \overline{d})$ y $(\mathbb{C}, d)$ tienen las mismas sucesiones convergentes).
    (b) Para $z, w \in \mathbb{C}$, verificar que $\overline{d}(z, w) = \dfrac{2|w - z|}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|w|^2)^{\frac{1}{2}}}$ y $\overline{d}(z, \infty) = \dfrac{2}{(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}}$.
    (c) Probar que $(\widehat{\mathbb{C}}, \overline{d})$ es un espacio métrico compacto (y por lo tanto completo).

27. Sea C una circunferencia contenida en S y sea π el único plano en $\mathbb{R}^3$ tal que $\pi \cap S = C$. Mostrar que si C pasa por N entonces su proyección en $\mathbb{C}$ es una recta y, en caso contrario, una circunferencia.

Homografías y simetrías

Una *homografía* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ del tipo $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ donde $ad - bc \neq 0$.

28. Probar que el conjunto $\mathcal{H}$ de las homografías es un grupo bajo la composición.

29. Sean z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Probar que existe una única homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$. Deducir que dados puntos distintos w_2, w_3, w_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_2 en w_2, z_3 en w_3 y z_4 en w_4.

30. (a) Hallar homografías que transformen
    (i) los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$;
    (ii) los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.
    (b) Probar que la imagen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la primera homografía del ítem anterior es la recta $\{z : \mathrm{Re}(z) = 1\}$.

31. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq 1$, demostrar que la homografía

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{-\overline{\alpha} z + 1}$$

transforma a la circunferencia $\{z : |z| = 1\}$ en si misma y a α en 0 ($|\alpha| \neq 1$).

32. Dada una matriz no singular

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}, \text{con } \det(A) = ab - cd \neq 0$$

le asignamos la homografía

$$T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Diremos que la matriz A representa a la homografía T_A.

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ no singulares que respresentan las homografías T_A y T_B respectivamente.

(a) ¿Qué homografía representa la matriz AB?
(b) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1}?
(c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?
(d) ¿Cuando dos matrices distintas representan la misma homografía?

33. Demostrar que una homografía $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ si y solo si a, b, c y d son números reales.

34. **Definición**: Dados z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, definimos la *razón doble* (z_1, z_2, z_3, z_4) por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}.$$

Observar que (z_1, z_2, z_3, z_4) es la imagen de z_1 bajo la homografía T tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$.

(a) Probar que si $T \in \mathcal{H}$ entonces $\big(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)\big) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

(b) Demostrar que z_1, z_2, z_3, z_4 están en una recta o circunferencia si y solo si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

35. **Definición**: Sea C una recta o circunferencia de $\widehat{\mathbb{C}}$ y z_2, z_3, z_4 puntos de C. Dos puntos z y z^* se dicen *simétricos* respecto de C sii $\overline{(z, z_2, z_3, z_4)} = (z^*, z_2, z_3, z_4)$.

(a) Probar que la definición anterior no depende de los punto elegidos z_2, z_3, z_4 sino de C.

(b) Probar que cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tiene un solo punto z^* simétrico respecto de C. A la aplicación que a cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ le asigna su simétrico respecto de C se la llama *simetría respecto de* C. Probar que para cada homografía T que aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en C, la función

$$T \circ \overline{T^{-1}} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$

es la simetría respecto de C.

(c) Probar que si S es una homografía y z, z^* son simétricos respecto de una recta o circunferencia C, entonces $S(z)$ y $S(z^*)$ son simétricos respecto de $S(C)$.

36. Probar que el simétrico del centro de una circunferencia C (respecto a C) es ∞.

37. Probar que en caso en que C sea una recta, esta nueva noción de simetría coincide con la simetría usual.

38. Dados tres puntos distintos z_1, z_2 y z_3 en $\widehat{\mathbb{C}}$, demostrar que existe una única recta o circunferencia que pasa por z_1 y hace que z_2 y z_3 sean simétricos.

39. Determinar la imagen de las siguientes regiones bajo la homografía indicada:

(a) El disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ por $f(z) = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$.

(b) El medio-disco $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ y } |z| < 1\}$ por $f(z) = \dfrac{2z - i}{2 + iz}$.

(c) El cuadrante $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ y } \operatorname{Re}(z) > 0\}$ por $f(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$.

40. Hallar homografías que transformen

(a) la circunferencia $|z| = 2$ en $|z + 1| = 1$ y además -2 en 0 y 0 en i;

(b) el semiplano superior $\operatorname{Im}(z) > 0$ en $|z| < 1$ y α en 0 (donde $\operatorname{Im}(\alpha) > 0$).