Práctica 2

1. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Hallar una sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que $B_n \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

2. Dada una función $f : X \longrightarrow Y$ y subconjuntos A, B de X y C, D de Y, probar que

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. ¿Vale la igualdad?

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(e) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Probar que si f es inyectiva, vale la igualdad.

(f) $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. Probar que si f es suryectiva, vale la igualdad.

(g) $f^{-1}(D)^c = f^{-1}(D^c)$.

3. Decimos que $A \sim B$ (A es *coordinable* con B) si existe $f : A \longrightarrow B$ biyectiva. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

4. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos

$$\mathbb{Z}_{\leq -3} \qquad 5\,\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \qquad (-1,1)\cap\mathbb{Q}$$

5. Probar que si A y B son conjuntos entonces:

(a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

(b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(c) $A \sim B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

6. (a) Sean $A \subseteq B$ conjuntos tales que A es numerable y $B \setminus A$ es infinito. Probar que $B \setminus A \sim B$.

(b) Hallar el cardinal del conjunto de los números irracionales.

7. Sean A_1, A_2 y B_1, B_2 dos pares de conjuntos tales que $A_1 \sim B_1$ y $A_2 \sim B_2$.

(a) Si A_1 y A_2 son disjuntos y B_1 y B_2 también, probar que $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

(b) Si A_1 y B_1 son numerables, probar que $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.
Nota: en este inciso los conjuntos A_1 y A_2 no necesariamente son disjuntos; lo mismo para B_1 y B_2.

8. Probar que si $\#A = n$ entonces $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$.

9. (a) Sea A y B conjuntos contables. Probar que $A \cup B$ es contable.

(b) Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables. Probar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es contable.

(c) Sea A un conjunto finito y no vacío y $S = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^m$. Probar que $\#S = \aleph_0$.

Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos. ¿Cuántos subconjuntos de $\mathbb{N}^2$ pueden ser definidos en un lenguaje fijo? ¿Cuántos hay en total?

10. Sea c el cardinal de $\mathbb{R}$. Probar:

(a) Si $\#A = c$ y $\#B = c$, entonces $\#(A \cup B) = c$.

(b) Si $\#A_n = c$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\#(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = c$.

11. (a) Probar que el conjunto de números primos es numerable.

(b) Escribir a $\mathbb{N}$ como unión numerable de conjuntos numerables disjuntos dos a dos.

12. Probar que si A es numerable entonces $\mathcal{P}_f(A) = \{B \subseteq A : B \text{ es finito}\}$ es numerable.

13. (a) Probar que $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A = \{\phi : A \to \{0,1\} \text{ funciones}\}$.

(b) Probar que $[0,1) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Sugerencia: escribir el desarrollo binario de los números del intervalo $[0,1)$. ¡Ojo! la escritura no es única.

(c) Concluir que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

14. Calcular el cardinal del siguiente conjunto:

$$E = \{B \subseteq \mathbb{N} : \#B = \#(\mathbb{N} \setminus B) = \aleph_0\}.$$

15. (a) Calcular el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(b) Calcular el cardinal de $[0,1) \times [0,1)$.

(c) Calcular el cardinal de $\mathbb{R}^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

16. Calcular el cardinal del conjunto formado por todos los polinomios con coeficientes reales.

17. Calcular el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es periódica}\}$.

(b) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

(c) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

18. Sea I un conjunto (de índices). Supongamos que existe una colección de intervalos no vacíos y disjuntos $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$ indexada por I. ¿Qué podemos decir del cardinal de I?

19. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que el conjunto de sus discontinuidades es contable.