ÁLGEBRA LINEAL - Práctica N°9 - Primer cuatrimestre de 2021

Variedades Lineales

Ejercicio 1. Probar que los siguientes conjuntos son variedades lineales y calcular sus dimensiones:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_3 = 1 \text{ y } x_2 + x_3 = -2\}$

ii) $M_2 = \{P \in \mathbb{Q}_3[X] \,/\, P'(2) = 1\}$

iii) $M_3 = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,/\, tr(A) = 5\}$

Ejercicio 2. Sean $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ y $L = < (0,1,1) > + (1,1,0)$. Hallar una variedad lineal $M \subseteq \mathbb{R}^3$ de dimensión 2 tal que $M \cap \Pi = L$.

Ejercicio 3. Hallar ecuaciones implícitas para la mínima variedad lineal $M \subseteq \mathbb{R}^4$ que contiene a $(1,1,2,0)$, $(2,1,1,0)$ y $(-1,0,4,1)$.

Ejercicio 4. Sean $L = < (2,1,1) > + (0,-1,1) \subseteq \mathbb{R}^3$ y $P = (0,0,1)$.

i) Hallar un plano Π tal que $L \subseteq \Pi$ y $P \in \Pi$.

ii) ¿Existirá un plano Π' tal que $L \subseteq \Pi'$, $P \in \Pi'$ y $(1,0,0) \in \Pi'$ simultáneamente?

Ejercicio 5.

i) Sea $L_1 = < (2,1,0) > + (0,0,1)$. Hallar una recta $L_2 \parallel L_1$ que pase por el punto $(-1,3,0)$.

ii) Si L_1 y L_2 son las rectas de i), hallar un plano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $L_1 \subseteq \Pi$ y $L_2 \subseteq \Pi$ simultáneamente. ¿Es Π único?

Ejercicio 6.

i) Encontrar en $\mathbb{R}^3$ dos rectas alabeadas que pasen por $(1,2,1)$ y $(2,1,1)$ respectivamente.

ii) Encontrar en $\mathbb{R}^4$ dos planos alabeados que pasen por $(1,1,1,0)$ y $(0,1,1,1)$ respectivamente.

iii) ¿Hay planos alabeados en $\mathbb{R}^3$? Más generalmente, si V es un K-espacio vectorial de dimensión n y M_1 y M_2 son variedades lineales alabeadas en V, ¿qué se puede decir de sus dimensiones?

Ejercicio 7. En cada uno de los siguientes casos, decidir si las variedades lineales M_1 y M_2 se cortan, son paralelas o son alabeadas. En cada caso, hallar $M_1 \cap M_2$, $M_1 \vee M_2$ y calcular todas las dimensiones:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$, $M_2 = < (1,0,1) > + (0,0,-3)$

ii) $M_1 = < (1,2,1,0), (1,0,0,1) > + (1,2,2,-1)$, $M_2 = < (1,0,1,1), (2,2,1,0) > + (-1,4,2,-3)$

iii) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 - 1 = x_3 + x_4 = 0\}$

$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 = x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0\}$

Ejercicio 8. Sean en $\mathbb{R}^3$

$$M_1 = < (1,1,1) > + (0,2,0) \ \text{ y } \ M_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = x_1 - x_2 + x_3 = 1\}.$$

i) Hallar planos Π_1 y Π_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_1 \subseteq \Pi_1$, $M_2 \subseteq \Pi_2$ y $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ simultáneamente.

ii) Hallar $M_1 \cap M_2$ y $M_1 \vee M_2$ y calcular sus dimensiones.

Ejercicio 9. Sean $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ las rectas definidas por

$$\begin{aligned} L_1 &= \big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 3.x_3 = 0\,,\; x_2 - x_3 = -2\big\} \quad \text{y} \\ L_2 &= \big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 6.x_3 = 1\,,\; x_2 + 2.x_3 = 0\big\}\,. \end{aligned}$$

Hallar una recta $L \subseteq \mathbb{R}^3$ que pase por el punto $(1,0,2)$ y corte a L_1 y a L_2.

Ejercicio 10. Sean $A = (1,1,2)$ y $B = (2,0,2)$. Sea $\Pi = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 = 2\}$. Hallar $C \in \Pi$ tal que A, B y C formen un triángulo equilátero. ¿La solución es única?

Ejercicio 11. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ las rectas $L_1 : x_2 = 0$, $L_2 : x_2 = \alpha$ y $L_3 : x_2 = \beta$, con α y β en $\mathbb{R}$ no nulos y distintos entre sí. Sean L y L' dos rectas transversales a L_1, L_2 y L_3. Probar que

$$\frac{d(L_1 \cap L, L_2 \cap L)}{d(L_2 \cap L, L_3 \cap L)} = \frac{d(L_1 \cap L', L_2 \cap L')}{d(L_2 \cap L', L_3 \cap L')}.$$

Este enunciado se conoce con el nombre de *Teorema de Thales.*

Ejercicio 12. Sean A_1, A_2 y A_3 en $\mathbb{R}^3$ tres puntos no alineados. Probar que el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, d(x,A_1) = d(x,A_2) = d(x,A_3)\}$$

es una recta ortogonal al plano que contiene a A_1, A_2 y A_3. Calcular S en el caso $A_1 = (1,-1,0)$, $A_2 = (0,1,1)$ y $A_3 = (1,1,2)$.

Ejercicio 13. Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal, para el producto interno canónico, sobre el subespacio $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$.

i) Hallar una recta $L \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L) = (1,2,1)$. ¿Es única?

ii) Hallar una recta $L' \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L') = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0,\; x_1 - x_3 = 0\}$. ¿Es única?

Ejercicio 14. Hallar en $\mathbb{R}^n$ el complemento ortogonal a M que pasa por A, la proyección ortogonal de A sobre M y $d(A,M)$ en los siguientes casos:

i) $n = 3, \quad M : \begin{cases} 3.x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}, \quad A = (1,0,0)$

ii) $n = 4, \quad M : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2.x_1 - 3.x_4 = 2 \end{cases}, \quad A = (0,2,0,-1)$

Ejercicio 15. Dado en $\mathbb{R}^2$ el triángulo de vértices $A = (2,-3), B = (8,5)$ y $C = (14,11)$, hallar la longitud de la altura que pasa por el vértice A.

Ejercicio 16. Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $P_1 = (1,-1,0)$ y $P_2 = (1,1,1)$. Encontrar tres planos Π distintos tales que $d(P_1,\Pi) = d(P_2,\Pi)$.

Ejercicio 17. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L = < (1,1,2) >$ y el punto $P = (1,0,-2)$. Encontrar un plano Π ortogonal a L tal que $d(P,\Pi) = \sqrt{6}$.

Ejercicio 18. Calcular la distancia entre M_1 y M_2 en los siguientes casos:

i) $M_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 + x_3 = 1\}$
$M_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 + x_3 = 3\}$

ii) $M_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 = 1\,,\, x_1 - x_3 = 0\}$
$M_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\,,\, x_3 = 1\}$

iii) $M_1 = < (1,-1,0),(2,1,1) > + (1,0,0)$
$M_2 = \{(3,0,1)\}$

iv) $M_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = -2\,,\, x_2 - 2.x_4 = 2\}$
$M_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\,,\, x_2 - 2.x_4 = -8\,,\, x_1 - x_2 + x_4 = 5\}$

Ejercicio 19. Probar que si M_1 y M_2 son variedades lineales de $\mathbb{R}^n$ con $\dim(M_1) \leq \dim(M_2)$ y $M_1 \parallel M_2$, entonces $d(M_1,M_2) = d(P,M_2)$ para todo $P \in M_1$.

Ejercicio 20. Sean en $\mathbb{R}^3$

$$M_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 + x_3 = 1\} \text{ y } M_2 = (1,1,1) + < (0,1,1),(1,0,-2) >.$$

Hallar un plano Π tal que $M_1 \parallel \Pi$, $M_2 \parallel \Pi$ y $d(M_1,\Pi) = d(M_2,\Pi)$.

Ejercicio 21. Sea $L = < (3,0,-4) > + (1,-1,0)$. Encontrar una recta L' alabeada con L, tal que $d(L,L') = 2$.

Ejercicio 22.

i) Construir una rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(M_1) = M_2$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $M_1 = \{(1,2,-1)\}$, $\quad M_2 = \{(-1,2,1)\}$
   b) $M_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 = 2,\, x_3 = 1\}$
   $M_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 = 1,\, 3.x_2 - x_3 = -4\}$
   c) $M_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = 3\}$
   $M_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = -3\}$

ii) Encontrar M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^3$ de igual dimensión tales que no haya ninguna rotación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla $f(M_1) = M_2$.

Ejercicio 23. Sean en $\mathbb{R}^3$ los planos $\Pi_1 : x_2 - x_3 = 1$ y $\Pi_2 : x_2 + x_3 = -1$. Definir una transformación ortogonal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\Pi_1) = \Pi_2$ y $f(\Pi_2) = \Pi_1$.

Ejercicio 24. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sean Π_1 y Π_2 los planos en $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$\Pi_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / \, x_1 - x_2 + 2x_3 = k\} \quad \text{y} \quad \Pi_2 = < (1,0,1),(0,1,2) > + (1,-1,1).$$

Determinar k para que exista una simetría $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\Pi_1) = \Pi_2$. Para ese valor de k hallar dicha simetría y calcular $f(\Pi_2)$.