

## ÁLGEBRA LINEAL - Práctica N°7 - Primer cuatrimestre de 2021

### Forma de Jordan

**Ejercicio 1.** Dadas las matrices  $A$  y  $A'$  en  $K^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Probar que ambas son nilpotentes y que  $A$  es semejante a  $A'$ .
- Dar bases  $B$  y  $B'$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  tal que la matriz de la derivación en la base  $B$  sea  $A$  y en la base  $B'$  sea  $A'$ .
- Sea  $B$  una base de  $K^n$  y sea  $f : K^n \rightarrow K^n$  tal que  $|f|_B = A$ . Probar que no existen subespacios propios  $f$ -invariantes  $S$  y  $T$  de  $K^n$  tales que  $K^n = S \oplus T$ .

**Ejercicio 2.** Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 3.** Sean  $A_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) matrices en  $\mathbb{C}^{8 \times 8}$  nilpotentes tales que  $m_{A_i} = X^3$  ( $1 \leq i \leq 6$ ). ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

**Ejercicio 4.** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$  nilpotentes tales que  $m_A = m_B$  y  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ . Probar que  $A$  y  $B$  son semejantes. ¿Es cierto esto en  $\mathbb{C}^{7 \times 7}$ ?

**Ejercicio 5.** Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j, \\ 1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

**Ejercicio 6.**

- Decidir si existe  $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$  nilpotente tal que  $\text{rg}(A) = 6$ ,  $\text{rg}(A^2) = 4$ ,  $\text{rg}(A^3) = 3$ ,  $\text{rg}(A^4) = 1$  y  $\text{rg}(A^5) = 0$  simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.
- Decidir si existe  $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$  tal que  $m_A(X) = X^5$ ,  $\text{rg}(A) = 9$ ,  $\text{rg}(A^2) = 5$ ,  $\text{rg}(A^3) = 3$ ,  $\text{rg}(A^4) = 1$  y  $\text{rg}(A^5) = 0$  simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

**Ejercicio 7.** Sea  $f : \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7$  una transformación lineal y sea  $B$  una base de  $\mathbb{C}^7$  tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Hallar  $\mathcal{X}_f$  y  $m_f$ .
- Sea  $\lambda$  un autovalor de  $f$  y sea  $m = \text{mult}(\lambda, \mathcal{X}_f)$ . Se definen  $E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / f(v) = \lambda.v\}$  y  $V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / (\lambda Id - f)^m(v) = 0\} = \text{Nu}((\lambda Id - f)^m)$ .  
¿Para qué autovalores  $\lambda$  de  $f$  se tiene que  $E_\lambda = V_\lambda$ ?
- Para cada autovalor  $\lambda$  de  $f$ , ¿cuál es la menor potencia  $k$  tal que  $V_\lambda = \text{Nu}((\lambda Id - f)^k)$ ?
- Si  $\lambda$  es un autovalor de  $f$ , sea  $f_\lambda$  la restricción de  $\lambda Id - f$  a  $V_\lambda$ . Calcular  $\dim(\text{Im}(f_\lambda))$  y  $\dim(\text{Im}(f_\lambda^2))$  para cada  $\lambda$ .

**Ejercicio 8.** Hallar la forma y una base de Jordan de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 9.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Para cada  $a \in \mathbb{R}$ , calcular  $\mathcal{X}_A$ ,  $m_A$  y hallar la forma de Jordan de  $A$ .
- Para  $a = 2$ , hallar una base de Jordan para  $A$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$  el subespacio  $V = \langle e^x, x e^x, x^2 e^x, e^{2x} \rangle$ . Sea  $\delta : V \rightarrow V$  la transformación lineal definida por  $\delta(f) = f'$ . Hallar la forma y una base de Jordan para  $\delta$ .

**Ejercicio 11.** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Decidir si  $A$  y  $B$  son semejantes.

**Ejercicio 12.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Probar que  $A$  y  $A^t$  son semejantes.

**Ejercicio 13.** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  tales que  $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X - 1)^3(X - 3)^2$  y  $m_A = m_B$ . Decidir si, necesariamente,  $A$  es semejante a  $B$ .

**Ejercicio 14.** Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  en cada uno de los siguientes casos:

i)  $\mathcal{X}_A(X) = (X - 2)^4(X - 3)^2$ ;  $m_A(X) = (X - 2)^2(X - 3)^2$

ii)  $\mathcal{X}_A(X) = (X - 7)^5$ ;  $m_A(X) = (X - 7)^2$

iii)  $\mathcal{X}_A(X) = (X - 2)^7$ ;  $m_A(X) = (X - 2)^3$

iv)  $\mathcal{X}_A(X) = (X - 3)^4(X - 5)^4$ ;  $m_A(X) = (X - 3)^2(X - 5)^2$

**Ejercicio 15.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$  una matriz con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  y que cumple, simultáneamente:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^4 &= 10, \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^4 &= 9, \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^2 &= 12, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^3 &= 11. \end{aligned}$$

Hallar su forma de Jordan.

**Ejercicio 16.** Dar la forma de Jordan de una matriz  $A \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$  que verifica, simultáneamente:

$$\begin{aligned} m_A &= (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)^2(X - \lambda_4)^3 \quad (\text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j), \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I) &= 11, \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^2 = 10, \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I) = 12, \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^2 = 10 \text{ y} \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_4 I) &= 13. \end{aligned}$$

**Ejercicio 17.** Calcular las posibles formas de Jordan de una matriz  $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  sabiendo que cumple simultáneamente:

- $X^2 - 6X + 9 \mid m_A(X)$ ,
- $\operatorname{rg}(A + I) = 3$  y
- $(A - 3I)^3(A + I)^3(A - I) = 0$ .

**Ejercicio 18.** Sean  $x, y \in \mathbb{C}^n$  y  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $A = (a_{ij})$  con  $a_{ij} = x_i \cdot y_j$ .

- i) Calcular todos los autovalores y autovectores de  $A$ .
- ii) Calcular las posibles formas de Jordan de  $A$ .

**Ejercicio 19.** Sea  $f: \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7$  la transformacin lineal cuya matriz en la base canónica es la matriz del Ejercicio 2. ii). Hallar subespacios  $f$ -invariantes  $S_1, S_2, \dots, S_6$  de  $\mathbb{C}^7$  tales que, para todo  $1 \leq i \leq 6$ ,  $\dim(S_i) = i$  y  $S_i \oplus S_{7-i} = \mathbb{C}^7$ .

**Ejercicio 20.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$  una matriz tal que  $m_A = X^6$  y sea  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  una base de Jordan para  $A$ . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices  $A^2, A^3, A^4$  y  $A^5$ .

**Ejercicio 21.** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , encontrar  $B \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$  tal que  $B^2 = A$ .

**Ejercicio 22.** Para cada una de las siguientes matrices  $A$ , calcular  $A^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 23.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz tal que su polinomio característico es  $(X - 1)^n$ . Probar que  $A^k$  es semejante a  $A$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 24.** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Se define la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término  $a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ .

**Ejercicio 25.** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_3'(t) = -x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1$ .