

- a) $S_1 \oplus S_2 = K^{n \times n}$ si $2 \neq 0$ en K . b) $S_5 \oplus S_6 = K^{n \times n}$ si $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} .

Ejercicio 5. Sea $A \in K^{n \times n}$. Probar que el conjunto $T = \{B \in K^{n \times n} / A.B = 0\}$ es un subespacio de $K^{n \times n}$. Si $S \subset K^n$ es el subespacio de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz asociada es A , probar que $\dim T = n \cdot \dim S$.

Ejercicio 6. Sean A y $B \in K^{n \times n}$. Probar que:

- i) Si A y B son triangulares superiores, $A.B$ es triangular superior.
- ii) Si A y B son diagonales, $A.B$ es diagonal.
- iii) Si A es estrictamente triangular superior (es decir, $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $A^n = 0$.

Ejercicio 7.

- i) Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{n \times n} / A.B = B.A \ \forall B \in K^{n \times n}\}$.
- ii) Sea $A \in K^{n \times n}$. Probar que el conjunto S de todas las matrices que conmutan con A es un subespacio de $K^{n \times n}$. Probar que $I_n \in S$ y que $A^j \in S \ \forall j \in \mathbb{N}$.
- iii) Sea $A \in K^{n \times n}$ con $n \geq 2$. Probar que el conjunto $\{I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2-1}\}$ es linealmente dependiente.

Ejercicio 8. Sean $A, A' \in K^{m \times n}$; $B \in K^{n \times r}$; $D, D' \in K^{n \times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

- i) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$ iv) $tr(D + D') = tr(D) + tr(D')$
- ii) $(\alpha.A)^t = \alpha.A^t$ v) $tr(\alpha.D) = \alpha.tr(D)$
- iii) $(A.B)^t = B^t.A^t$ vi) $tr(D.D') = tr(D'.D)$

Ejercicio 9.

- i) Sea $A \in K^{m \times n}$. Probar que $A.A^t$ y $A^t.A$ son matrices simétricas. Dar un ejemplo donde $m = n$ y $A.A^t \neq A^t.A$.
- ii) Si $K = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff A.A^t = 0 \iff tr(A.A^t) = 0$.
- iii) El producto de dos matrices simétricas, ¿es una matriz simétrica?

Ejercicio 10. Sea $A \in K^{2 \times 2}$ con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y sea $\Delta = a.d - b.c$. Probar que, si $\Delta \neq 0$, $A \in GL(2, K)$ y $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ejercicio 11. Sea $A \in GL(n, K)$ y $B, C \in K^{n \times m}$. Probar que:

- i) $A.B = A.C \Rightarrow B = C$ ii) $A.B = 0 \Rightarrow B = 0$

Ejercicio 12. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

- i) $A, B \in GL(n, K) \Rightarrow A + B \in GL(n, K)$
- ii) $A \in GL(n, K) \iff A^t \in GL(n, K)$
- iii) $tr(A) = 0 \Rightarrow A \notin GL(n, K)$
- iv) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N} / A^j = 0$) $\Rightarrow A \notin GL(n, K)$

Ejercicio 13. Sea $A \in K^{m \times n}$ y sea $b \in K^m$. Sea $H = \{x \in K^n / A.x = b\}$. Probar:

- i) Si $C \in GL(m, K)$, entonces $H = \{x \in K^n / (C.A).x = C.b\}$.
- ii) Si $m = n$ y $A \in GL(n, K)$, entonces H tiene un solo elemento. ¿Cuál es? (Notar que esto significa que si A es inversible, cualquier sistema lineal cuya matriz asociada sea A tiene solución única).

Ejercicio 14.

- i) Para cada i, j ($1 \leq i, j \leq n$), sea $E^{ij} \in K^{n \times n}$ la matriz:

$$(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Las matrices E^{ij} se llaman *matrices canónicas* de $K^{n \times n}$.

- a) Si $a \in K - \{0\}$ y $1 \leq i \leq n$, se define $M_i(a) \in K^{n \times n}$ como

$$M_i(a) = E^{11} + E^{22} + \dots + a.E^{ii} + E^{(i+1)(i+1)} + \dots + E^{nn} = I_n + (a - 1).E^{ii}.$$

Escribir todas las posibles $M_i(a)$ para $n = 2, 3, 4$ ($a \in K$).

- b) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$. Se define la matriz $P^{ij} \in K^{n \times n}$ como la matriz que se obtiene permutando la fila i con la fila j de la matriz identidad. Comprobar que

$$P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}.$$

Escribir todas las posibles P^{ij} para $n = 2, 3, 4$.

- c) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$ y $a \in K$. Se define la matriz $T^{ij}(a) \in K^{n \times n}$ como

$$T^{ij}(a) = I_n + a.E^{ij}.$$

Escribir todas las posibles $T^{ij}(a)$ para $n = 2, 3, 4$ ($a \in K$).

Las matrices $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ se llaman *matrices elementales* de $K^{n \times n}$.

- ii) Probar que:

- a) $M_i(a) \in GL(n, K)$ con $(M_i(a))^{-1} = M_i(a^{-1})$
- b) $P^{ij} \in GL(n, K)$ con $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$
- c) $T^{ij} \in GL(n, K)$ con $(T^{ij}(a))^{-1} = T^{ij}(-a)$

- iii) Sea $A \in K^{n \times m}$, $A = (a_{ij})$, y sea F_i ($1 \leq i \leq n$) la i -ésima fila de A , es decir, $F_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$

y $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$. Probar que:

- a) $E^{ij}.A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = (0, \dots, 0)$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_j$.
- b) $M_i(a).A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = a.F_i$.
- c) $P^{ij}.A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i, j$; $F'_i = F_j$ y $F'_j = F_i$.
- d) $T^{ij}(a).A = \begin{pmatrix} F'_1 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_i + a.F_j$.

Notar como conclusión que triangular por filas una matriz es multiplicar a izquierda por varias matrices elementales.

¿Cómo se pueden obtener las matrices elementales a partir de la matriz identidad?

Ejercicio 15.

- i) Sea $A = T^{12}(1) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Calcular A^{20} y $20.A$.
- ii) Calcular $(P^{ij})^{15}$ y $(P^{ij})^{16}$.
- iii) Sea $B = M_3(2) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Calcular B^{20} y $20.B$.

Ejercicio 16. Determinar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas. Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

- i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
- iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ v) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ejercicio 17. Sea $A \in K^{n \times n}$ y sea $b \in K^n$.

- i) Probar que el sistema $A.x = b$ tiene solución única $\iff A \in GL(n, K)$.
- ii) Probar que $A \in GL(n, K) \iff$ las filas de A son linealmente independientes \iff las columnas de A son linealmente independientes.

Ejercicio 18. Sea $A \in K^{n \times n}$. Probar que $\exists B \in K^{n \times n} / B.A = I_n \iff A \in GL(n, K)$. Deducir que $\exists B \in K^{n \times n} / A.B = I_n \iff A \in GL(n, K)$.

Ejercicio 19. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

- i) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, -1, 2)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$
- ii) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3, 1 + X, X^2 + 5, X^3 + X^2\}$
- iii) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 20. Calcular $C(B, B')$ en los siguientes casos:

- i) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$
- ii) $V = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3, 1 + X, X^2\}$, $B' = \{1, X + 3, X^2 + X\}$
- iii) $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$
- iv) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$, $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 21. Dado $v \in V$ y las bases B y B' , hallar las coordenadas de v respecto de B y, utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B' .

- i) $v = (-1, 5, 6)$ y B, B' como en el Ejercicio 20. i)
- ii) $v = 3 + X^2$ y B, B' como en el Ejercicio 20. ii)
- iii) $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y B, B' como en el Ejercicio 20. iv)

Ejercicio 22. Dadas la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de K^3 , hallar:

- i) una base B_1 de K^3 tal que $M = C(B_1, B)$.
- ii) una base B_2 de K^3 tal que $M = C(B, B_2)$.