Topología Algebraica

Primer cuatrimestre - 2021

Práctica 4

Teoría combinatoria de grupos y espacios finitos

---

1. Probar que $\langle x, y | xyx^{-1}, x^{-1}y^3 \rangle$ cumple la conjetura de Andrews-Curtis, es decir, es Q**-equivalente a $\langle | \rangle$. Probar además que $\langle x, y | x^3y^{-4}, xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1} \rangle$ es una presentación del grupo trivial. No se sabe si esta presentación cumple Andrews-Curtis, es uno de los llamados "potenciales contraejemplos".

2. Sea m un entero positivo. Calcular los grupos de homología de $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_m$.

3. Sea $\mathcal{P}$ una presentación que contiene una relacion r que está en el subgrupo normal generado por las relaciones distintas de r. Probar que $\mathcal{P}$ no es asférica.

4. Probar que la conjetura de Whitehead se verifica si el subcomplejo es simplemente conexo.

5. Probar que la propiedad de ser asférico para un CW-complejo de dimensión 2 es invariante por adjunción de 1-celdas.

6. Sea K un CW-complejo conexo de dimensión 2 y sea L un subcomplejo conexo. ¿Es cierto que la inclusión $L \hookrightarrow K$ induce un monomorfismo en los π_2?

7. Probar que para cualquier grupo H y coeficientes $h_1, h_2, h_3, h_4 \in H$, la ecuación $h_1xh_2yh_3x^{-1}h_4y^{-1}$ en las variables x, y tiene solución en un overgroup de H.

8. Probar que $\mathcal{P} = \langle x | x^2x^{-1} \rangle$ no es DR pero es asférica.

9. Sea $H = \mathbb{Z}_p$ con p un primo impar. Sea h un generador de H. Probar que la ecuación $xhx^{-1}hxh^{-1}x^{-1}h^{-2}$ no tiene solución en ningún overgroup de H.

10. Probar que dos CW-complejos $K(G, 1)$ son siempre homotópicamente equivalentes.

11. Sean $f, g : X \to Y$ dos morfismos de orden entre posets no necesariamente finitos tales que $f \leqslant g$. Probar que $|\mathcal{K}(f)|, |\mathcal{K}(g)| : |\mathcal{K}(X)| \to |\mathcal{K}(Y)|$ son homotópicas.

12. Probar el Teorema de Dowker sobre los dos complejos asociados a una relación.

13. Sea K un complejo simplicial finito. Sea L el complejo simplicial que tiene como vértices a los símplices maximales de K y como símplices a los conjuntos de símplices maximales de K con intersección no vacía. Probar que K y L son homotópicamente equivalentes.

14. Probar que todo espacio finito X es homotópicamente equivalente a su cociente (de Kolmogorov) T_0 maximal X_0.

15. Probar que todo espacio finito T_0 contráctil X contiene un punto que es retracto por deformación fuerte de X y mostrar con un ejemplo que puede haber un punto que no sea retracto por deformación fuerte de X.

16. Probar que si un espacio finito T_0 X es contráctil, entonces $X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$ también lo es.

17. Sea X un espacio finito T_0 conexo y sea $x \in X$ un punto que no es maximal ni minimal. Probar que la inclusión $X \smallsetminus \{x\} \to X$ induce un epimorfismo en los grupos fundamentales.

18. Probar que existe un espacio finito T_0 no contráctil cuyos grupos de homotopía son todos triviales.

19. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios finitos T_0 tal que $f^{-1}(U_y)$ es acíclico para todo $y \in Y$. Probar que f induce isomorfismos en todos los grupos de homología.

20. Sea G un grupo finito y p un primo que divide su orden. Sea $\mathcal{A}_p(G)$ el poset de p-subgrupos abelianos elementales no triviales (i.e. isomorfos a $\mathbb{Z}_p^n$ para algún $n \geqslant 1$). Probar que la inclusión $\mathcal{A}_p(G) \to S_p(G)$ es una equivalencia débil entre los espacios finitos.