Topología Algebraica

Primer cuatrimestre - 2021

Práctica 2

Espacios de adjunción y (co)fibraciones

---

1. Sean X, Z espacios, $A \subseteq X$, $Y \subseteq Z$ subespacios cerrados. Sea $f : X \to Z$ continua tal que $f(A) \subseteq Y$, $f(X \smallsetminus A) \subseteq Z \smallsetminus Y$ y $f : X \smallsetminus A \to Z \smallsetminus Y$ es una biyección. Si X es compacto y Z es Hausdorff entonces

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f|_A"] \arrow[d, "i"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

es un pushout.

2. Sean X, Y espacios T_2 y A un subespacio cerrado de X tales que para todo $x \in X \smallsetminus A$ existe un entorno cerrado de x en X que no interseca a A. Además supongamos que A es retracto de un entorno de A en X. Probar que para toda $f : A \to Y$ continua, $Y \bigcup_f X$ es T_2.

3. Probar que una función continua $i : A \to X$ es una cofibración si y sólo si para todo espacio Y y funciones continuas $g : A \to Y^I$, $f : X \to Y$ tales que $ev_0 g = fi$ existe $\widetilde{g} : X \to Y^I$ tal que $ev_0\widetilde{g} = f$ y $\widetilde{g}i = g$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & Y^I \arrow[d, "ev_0"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\exists \widetilde{g}"] & Y \end{tikzcd}$$

4. Probar que los homeomorfismos son cofibraciones, que composición de cofibraciones es cofibración y que las cofibraciones son estables por cambio de cobase.

5. Sea $i : A \to X$ una función subespacio y sea $s : Z_i \to X \times I$ la función inducida. Probar que s es inyectiva y que en general no es subespacio. Probar que si i es subespacio cerrada, entonces s sí resulta subespacio.

6. Probar que si X es un espacio y A es un subespacio finito, entonces los abiertos de $A \times I \cup X \times \{0\} \subseteq X \times I$ son aquellos que intersecados con $A \times I$ y con $X \times \{0\}$ son ambos abiertos, en $A \times I$ y $X \times \{0\}$, respectivamente. Este es un lema en un paper de Cianci y Ottina en el que se caracterizan las cofibraciones entre espacios finitos.

7. Sea X un espacio normal (en particular T_1) y sea $A \subseteq X$ un subespacio cerrado. Probar que $i : A \hookrightarrow X$ es una cofibración si y sólo si existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $A \subseteq U$ y $j : A \hookrightarrow U$ es cofibración.

8. Sea $i : A \hookrightarrow X$ una cofibración. Probar que $i \times 1_I : A \times I \to X \times I$ es una cofibración (aunque i no sea cerrada).

9. Probar que si $i : A \hookrightarrow X$ es cofibración y A es contráctil entonces el cociente $q : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.

10. Probar que si $i : A \hookrightarrow X$ es cofibración y una equivalencia homotópica entonces A es un retracto por deformación fuerte de X.

11. Para las dos inclusiones de $*$ en el espacio de Sierpinski decidir cuál es una cofibración.

12. Sea $i : A \to X$ una cofibración, Y un espacio y $f, g : X \to Y$ dos funciones homotópicas que coinciden en A. Es cierto que $f \simeq g \text{ rel } A$?

13. Probar que los homeomorfismos son fibraciones, que composición de fibraciones es una fibración, que son estables por cambio de base y que producto arbitrario de fibraciones $p_j, j \in J$ es fibración.

14. Probar que para todo espacio X, $ev_0 : X^I \to X$ es una fibración.

15. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sea X un espacio contráctil y $f : X \to B$ una función con imagen contenida en la imagen de p. Probar que f se puede levantar a E.

16. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Probar que si la función $\overline{p} : X^I \to P_f$ inducida por f y ev_0 es una retracción, entonces f es una fibración.

17. Probar que toda función continua se factoriza como ps donde s es una equivalencia homotópica y p es una fibración.

18. Sea $p : E \to B$ una fibración con B arcoconexo. Probar que las fibras de dos puntos arbitrarios de B son homotópicamente equivalentes.

19. Sea $p : E \to B$ una fibración
    (a) Si B es contráctil y $b \in B$, probar que existe una equivalencia homotópica $f : E \to B \times E_b$ tal que $p_B f = p$, donde E_b denota a la fibra y p_B es la proyección sobre B. En este caso p se dice homotópicamente trivial.
    (b) En las condiciones del ítem anterior, supongamos que $i : A \to B$ es una cofibración. Probar que la fibración inducida $q : p^{-1}(A) \to A$ también es homotópicamente trivial.