Topología Algebraica

Primer cuatrimestre - 2021

Práctica 1

Complejos simpliciales/poliedros

---

1. Sea K el complejo simplicial con conjunto de vértices $V_K = \mathbb{N}_0$ y conjunto de símplices $S_K = \{n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \cup \{0, n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Probar que $|K|$ no es un espacio métrico.
2. Probar que el plano proyectivo, la botella de Klein y el toro son poliedros. Comentario: En general toda variedad topológica de dimensión 2 ó 3 es un poliedro (es falso en dimensión mayor o igual a 4. Para dimensión mayor o igual a 5 esto se probó en 2015). Toda variedad diferenciable es un poliedro.
3. Sea $\mathcal{U} = \{\overset{\circ}{\mathrm{st}}(v) \mid v \in K\}$. Probar que el nervio $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ es isomorfo a K.
4. Sea K un complejo simplicial y X un espacio topológico. Probar que una función $f : |K| \to X$ es continua si y sólo si la restricción $f| : |K^n| \to X$ a cada esqueleto es continua.
5. Sea K un complejo simplicial. Probar que $|K|$ es conexo si y sólo si para cada par de vértices $v, w \in K$ existe una sucesión $v = v_0, v_1, \ldots, v_r = w$ de vértices tal que $v_iv_{i+1} \in K$ para todo i.
6. Probar que todo poliedro es normal.
7. Probar que todo poliedro conexo tiene un revestimiento universal.
8. Probar que los revestimientos de poliedros son poliedros.
9. Sean K y L complejos simpliciales y sea $\varphi : K \to L$ un aproximación simplicial de una función continua $f : |K| \to |L|$. Probar que $f(\overset{\circ}{\mathrm{st}}(v)) \subseteq \overset{\circ}{\mathrm{st}}(\varphi(v))$ para todo $v \in K$.
10. Sean K y L complejos simpliciales finitos y $f : |K| \to |L|$ una función continua. Probar que para todo $\epsilon > 0$ existen subdivisiones $\widetilde{K}$ de K y $\widetilde{L}$ de L y un morfismo simplicial $\varphi : \widetilde{K} \to \widetilde{L}$ tal que $d(f(x), |\varphi|(x)) < \epsilon$ para todo $x \in |K|$, donde d denota a la métrica usual de $|L|$.
11. Hallar dos morfismos simpliciales con realizaciones homotópicas que no sean contiguos. ¿Existen morfismos simpliciales en diferentes clases de contigüidad que tengan realizaciones homotópicas?
12. Probar que dos aproximaciones simpliciales $K \to L$ de una misma función continua $|K| \to |L|$ son contiguas.
13. Sea X un conjunto. Decimos que un cubrimiento $\mathcal{V}$ de X *refina* a otro cubrimiento $\mathcal{U}$ si todo elemento de $\mathcal{V}$ está contenido en uno de $\mathcal{U}$. Una *proyección canónica* $\mathcal{N}(\mathcal{V}) \to \mathcal{N}(\mathcal{U})$ es una aplicación que elige para cada $V \in \mathcal{V}$ un elemento $\varphi(V) = U \in \mathcal{U}$ que contiene a V. Probar que toda proyección canónica es un morfismo simplicial y que dos proyecciones canónicas son contiguas.
14. Sea K un complejo simplicial finito. Probar que $H_0(K)$ es un grupo abeliano libre cuyo rango es el número de componentes conexas de $|K|$.
15. Calcular a mano los grupos de homología del borde del 3-simplex.
16. Sea K un complejo tal que todo subcomplejo de 4 vértices o menos está contenido en un cono. Probar que $H_1(K) = 0$. Usando el Edge path-group se puede ver que K es simplemente conexo.

17. Si K_0 es un sucomplejo de un complejo K y L_0 es subcomplejo de L, un *morfismo (simplicial) de pares* $\varphi : (K, K_0) \to (L, L_0)$ es un morfismo simplicial $\varphi : K \to L$ que manda simplices de K_0 en simplices de L_0. Dos morfismos de pares $\varphi, \psi : (K.K_0) \to (L, L_0)$ se dicen *contiguos* si $\varphi, \psi : K \to L$ son contiguos y $\varphi|_{K_0}, \psi|_{K_0} : K_0 \to L_0$ son contiguos.

    - Probar que si dos morfismos de pares $\varphi, \psi : (K.K_0) \to (L, L_0)$ cumplen que $\varphi, \psi : K \to L$ son contiguos y L_0 es subcomplejo pleno de L, entonces los morfismos de pares son contiguos.
    - Probar que si dos morfismos de pares $\varphi, \psi : (K.K_0) \to (L, L_0)$ son contiguos entonces inducen morfismos de complejos $C_*(K, K_0) \to C_*(L, L_0)$ homotópicos.

18. Sea K un complejo simplicial finito y no vacío. Probar que $\widetilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$ es isomorfo a $H_0(K)$.

19. Probar que si un complejo simplicial K es unión de dos subcomplejos L y M, se tiene una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \to C_*(L \cap M) \to C_*(L) \oplus C_*(M) \to C_*(K) \to 0$$

    y por lo tanto se tiene una sucesión de Mayer-Vietoris para la homología simplicial. También se tiene una sucesión análoga para homología reducida.

20. Sea σ un 1-simplex, $\dot{\sigma}$ su borde, K un complejo simplicial y $\dot{\sigma}K$ el join de ambos (la *suspensión* de K). Probar, usando la sucesión de Mayer-Vietoris, que $\widetilde{H}_n(\dot{\sigma}K) = \widetilde{H}_{n-1}(K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

21. Sea K un complejo simplicial finito. Un simplex $\sigma \in K$ se dice una *cara libre* de K si es cara propia de un único simplex τ. Notar que si removemos de K los símplices σ y τ obtenemos un subcomplejo $L \leq K$. Decimos que K *colapsa elementalmente* a L. Un *colapso* es una sucesión de colapsos elementales y K se dice *colapsable* si colapsa a un punto. Probar que todo complejo colapsable es acíclico. En realidad vale que es contráctil, pero evitar por ahora usar ese argumento.

22. Sea K un complejo simplicial y sea K' su subdivisión baricéntrica. Sea $\lambda : \widetilde{C}_*(K) \to \widetilde{C}_*(K')$ el operador subdivisión. Probar que si $\varphi : K' \to K$ es una aproximación de la identidad entonces $\varphi_* \lambda : \widetilde{C}_*(K) \to \widetilde{C}_*(K)$ es la identidad.

23. Sea X un poliedro compacto. Probar que toda función continua $f : X \to X$ null homotópica tiene un punto fijo.

24. Probar que el Teorema de Lefschetz sigue siendo válido para retractos de poliedros compactos.

25. Probar que el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ tiene la propiedad del punto fijo.

26. Si K es un complejo finito y $H_1(K)$ tiene a $\mathbb{Z}$ como sumando directo, entonces S^1 es un retracto de $|K|$ (difícil). Probar que en este caso $|K|$ no tiene la propiedad del punto fijo.

    Un cubrimiento $\mathcal{U}$ de un espacio X se dice *localmente finito* si todo punto de X tiene un entorno que interseca sólo finitos elementos de $\mathcal{U}$. Un espacio se dice *paracompacto* si todo cubrimiento por abiertos admite un refinamiento por abiertos localmente finito. Recordar que si X es paracompacto y Hausdorff, todo cubrimiento por abiertos $\mathcal{U}$ admite una partición de la unidad subordinada ([M, Theorem 41.7]).

27. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de un espacio X y sea $N(\mathcal{U})$ su nervio. Una función continua $f : X \to |N(U)|$ se dice *canónica* si $f^{-1}(\overset{\circ}{\mathrm{st}}(U)) \subseteq U$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Probar que

(i) Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento localmente finito de X, hay una biyección entre las funciones canónicas $X \to |N(\mathcal{U})|$ y las particiones de la unidad subordinadas a $\mathcal{U}$.

(ii) Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento localmente finito de X, todas las funciones canónicas $X \to |N(\mathcal{U})|$ son homotópicas.

28. Decimos que un espacio X tiene dimensión topológica menor o igual a n si todo cubrimiento por abiertos de X admite un refinamiento abierto cuyo nervio tiene dimensión menor o igual a n. Decimos que la dimensión topológica de X es $\dim(X) = n$ si es menor o igual a n pero no es menor o igual a $n-1$. Probar que:

    (i) Si $A \subseteq X$ es un subespacio cerrado, entonces $\dim(A) \leqslant \dim(X)$.

    (ii) Si K es un complejo simplicial finito y $\dim(K) \leqslant n$, entonces $\dim(|K|) \leqslant n$.

    (iii) Si σ es un n-simplex, entonces $\dim(|\sigma|) = n$.

    (iv) Si X es paracompacto y $\dim(X) \leqslant n$, entonces toda función continua $X \to S^m$ es nullhomotópica para $m > n$.

29. Sea X un espacio métrico compacto y sea C el espacio de funciones continuas $X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ con la métrica infinito. Probar que

    (i) C es un espacio métrico completo.

    (ii) Para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$C_m = \{f \in C \mid \operatorname{diam}(f^{-1}(z)) < \frac{1}{m} \ \forall z \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$$

    es abierto en C.

    (iii) $\bigcap C_m$ es el conjunto de funciones subespacio $X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.

    (iv) Si $\dim(X) \leqslant n$, C_m es denso en C para todo m. Deducir que X es subespacio de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

30. Se construye al azar un complejo simplicial K con $V_K \subseteq \{a, b, c\}$. Para cada vértice se lanza una una moneda y si sale cara, se agrega al complejo. Una vez construido el 0-esqueleto, por cada par de vértices que esté presente, se lanza la moneda y si sale cara se agrega el 1-simplex con ese borde. Finalmente, si todo el triángulo está completo, se lanza una moneda para saber si incluir el 2-simplex. Cuál es la probabilidad de que K sea contráctil?

[M] J. Munkres. Topology (2da edición).