ALGEBRA II, 2021/I

PRÁCTICA 4

(1) Sea A un anillo conmutativo y $\alpha \in M(n \times m, A)$ una matriz $n \times m$ con coeficientes en A. Verificar que la aplicación $a : A^m \to A^n$ definida por $a(x) = \alpha.x$ (producto de matrices, identificando A^m con $M(m \times 1, A)$) es un morfismo de A-módulos. Dar un sistema finito de generadores de $\mathrm{im}(a)$. Probar que el conjunto $S = \{x \in A^m / \alpha.x = 0\}$ de soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas definido por α, es un A-submódulo de A^m. Es todo submódulo de A^m de esta forma ?

(2) Sea A un anillo conmutativo y M un A-módulo. Para los siguientes morfismos de A-módulos, calcular núcleo e imagen y determinar cuales morfismos son monomorfismo, epimorfismo, sección, retracción, isomorfismo.
  a) $f : M^n \to M^2$, $f(x) = (x_1 + x_n, x_n)$
  b) $f : M^n \to M^n$, $f(x) = (\sum_{1 \leq i \leq j} x_i)_{1 \leq j \leq n}$
  c) si $n \leq m$, $f : M^n \to M^m$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$
  d) si $n \leq m$, $f : M^m \to M^n$, $f(x) = (x_1, \dots, x_n)$
  e) si $z \in M^n$, $f : A^n \to M$, $f(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i.z_i$
  f) si $z \in A^n$, $f : M^n \to M$, $f(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} z_i.x_i$
  g) para $a \in A$, $e_a : A[x] \to A$, $e_a(\sum_i a_i.x^i) = \sum_i a_i.a^i$
  h) $d : A[x] \to A[x]$, $d(\sum_i a_i.x^i) = \sum_i a_i.ix^{i-1}$. El morfismo d tiene las propiedades adicionales $d(p.q) = d(p).q + p.d(q)$ y $d(a.x^0) = 0$
  i) $\mathrm{tr} : M(n \times n, A) \to A$, $\mathrm{tr}(a) = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{jj}$ (morfismo traza)
  j) $\mathrm{dg} : M(n \times n, A) \to A^n$, $\mathrm{dg}(a) = (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$
  k) $\Delta : A \to A^J$, $\Delta(a)_j = a, \forall j \in J$. (morfismo diagonal)
  l) si $J \subset I$, $\rho : M^I \to M^J$, $\rho(\alpha) = \alpha|_J$.

(3) Si M es un A-módulo e I es un ideal de A de manera que $IM = 0$, entonces M tiene una estructura de A/I-módulo dada por $[a] \cdot m = a \cdot m$.

(4) a) Sea A un anillo y $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos.
    i) Si M es simple entonces $f = 0$ o f es un monomorfismo.
    (Un A-módulo M es simple si sus únicos submódulos son $\{0\}$ y M)
    ii) Si N es simple entonces $f = 0$ o f es un epimorfismo.
    iii) Si M y N son simples entonces $f = 0$ o f es un isomorfismo.
    iv) Probar que para un A-módulo M, el grupo aditivo $\mathrm{End}_A(M) = \mathrm{Hom}_A(M, M)$ con la operación de composición constituye un anillo. Si M es simple entonces $\mathrm{End}_A(M)$ es un anillo de división.
  b) Si I y J son conjuntos coordinables (existe una biyección $I \to J$) entonces M^I y M^J son isomorfos, para todo A-módulo M.

c) Una involución de un A-módulo M es un morfismo $f : M \to M$ tal que $f^2 = \mathrm{id}_M$. Toda involución es un automorfismo. Exhibir ejemplos de involuciones.

d) Un proyector de un A-módulo M es un morfismo $f : M \to M$ tal que $f^2 = f$. Probar que $M \equiv \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$. Probar que, recíprocamente, si A y B son submódulos de M tales que $M \equiv A \oplus B$ entonces existe un único proyector $f : M \to M$ tal que $A = \ker(f)$ y $B = \mathrm{im}(f)$.

(5) a) El morfismo $\mathrm{tr} : M(n \times n, A) \to A$, $\mathrm{tr}(a) = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{jj}$ satisface

i) $\mathrm{tr}(e) = n.1$ (e denota la matriz identidad)

ii) $\mathrm{tr}(a.b) = \mathrm{tr}(b.a)$ (A conmutativo)

b) Si A es un anillo conmutativo tal que $m.a = 0$ implica $a = 0$ o $m = 0$ ($a \in A, m \in \mathbb{Z}$) entonces tr es el único morfismo $M(n \times n, A) \to A$ que satisface i) y ii).

c) Sea A como en b) y $n > 1$. Probar que no existe ningún epimorfismo $f : M(n \times n, A) \to A$ tal que $f(a.b) = f(a).f(b), \forall a, b$.

(6) Sea A un anillo conmutativo.

a) Para cada A-módulo M definir un isomorfismo de A-módulos

$$\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M.$$

b) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$.

c) Dado un A-módulo M, se llama dual de M al A-módulo

$$M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A).$$

La aplicación $c_M : M \to M^{**}$ definida por $c_M(m)(f) = f(m)$ (para $m \in M, f \in M^*$) es un morfismo de A-módulos y $\ker(c_M) = \bigcap_{f \in M^*} \ker(f)$.

(7) Sea A un dominio de integridad y $a \in M(n \times n, A)$. Denotemos $v_j = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n} \in A^n$ la j-esima columna de a. Demostrar:

a) $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes si y solo si $\det(a) \neq 0$.

b) $v_1, \ldots, v_n$ generan A^n si y solo si $\det(a)$ es una unidad de A.

(8) Sea M un A-módulo. Si H y K son submódulos de M, denotamos

$$H + K = \{h + k, h \in H, k \in K\}.$$

Verificar que el conjunto de submódulos de M con la operación $+$ es un monoide conmutativo. El único elemento inversible es $\{0\}$.

(9) Si X e Y son conjuntos y $f : X \to Y$ es una función, el conjunto

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)), x \in X\} \subset X \times Y$$

se llama el gráfico de f. Supongamos que X e Y son A-módulos. Demostrar que f es un morfismo de A-módulos si y solo si $\Gamma(f) \subset X \times Y$ es un submódulo.

(10) Sea M un A-módulo. Se llama anulador del subconjunto $S \subset M$ a

$$\mathrm{An}(S) = \{a \in A / a.s = 0, \forall s \in S\}.$$

Si $x \in M$, $\mathrm{An}(\{x\})$ sera indicado -por abuso de notación- $\mathrm{An}(x)$. M se dice un A-módulo fiel si $\mathrm{An}(M) = 0$.

a) $\mathrm{An}(S)$ es un ideal a izquierda de A.

b) $\mathrm{An}(S) = A$ sii $S \subset \{0\}$.

c) $\mathrm{An}(\bigcup_{j \in J} S_j) = \bigcap_{j \in J} \mathrm{An}(S_j)$.

d) $\mathrm{An}(S) = \bigcap_{s\in S} \mathrm{An}(s)$.
e) si $S \subset T$ entonces $\mathrm{An}(T) \subset \mathrm{An}(S)$.
f) Si $S \subset M$ es A-estable entonces $\mathrm{An}(S)$ es un ideal bilátero de A.
g) $M(n \times n, A)$ es un A-módulo fiel. Exhibir otros ejemplos de módulo fiel.
h) $\mathrm{An}(M^J) = \mathrm{An}(M^{(J)}) = \mathrm{An}(M)$ si $J \neq \varnothing$.

(11) Sea M un A-módulo. Caracterizar el módulo cociente N/S en cada uno de los siguientes casos:
a) $N = M^n, n \in \mathbb{N}$, $S = \{x \in N / \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.
b) $N = M^n, n > 2$, $S = \{x \in N/x_1 = x_n, x_2 = 0\}$.
c) $N = A[x]$, $S = \{x \in N/x(c) = 0\}(c \in A)$.
d) $N = M(n \times n, A)$, $S = \{x \in N/\mathrm{dg}(x) = 0\}$.
e) $N = M(n \times n, A)$, $S = \{x \in N/\mathrm{tr}(x) = 0\}$.
f) $N = M^J$, $S = \{x \in N/x_i = 0 \ \ \forall i \in I\}(I \subset J)$.

(12) Sea M un A-módulo. Se dice que un submódulo $N \subset M$ tiene índice finito si el módulo cociente M/N es finito. Probar que si N_1 y N_2 tienen índice finito en M entonces $N_1 \cap N_2$ también tiene índice finito.

(13) Sea A un anillo. Denotamos $S = \{a \in M(n \times n, A) \ /t(a) = a\}$ el submódulo de matrices simétricas ($t(a)_{ij} = a_{ji}$) y $T = \{a \in M(n \times n, A) \ /t(a) = -a\}$ el submódulo de matrices anti-simétricas. Verificar que si $2 \in A$ es una unidad entonces $M(n \times n, A) \equiv S \oplus T$.

(14) Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar:
a) f es sección lineal sii f es inyectiva e $\mathrm{im}(f)$ es un sumando directo de N.
b) f es retracción lineal sii f es sobreyectiva y $\ker(f)$ es un sumando directo de M.

(15) a) Demostrar que si A es un dominio íntegro y M un A-módulo, entonces la torsión $t(M)$ es un submódulo de M.
b) Probar que si $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, entonces $t(A)$ no es un submódulo de A.
c) Sea A un anillo y $B = M(n \times n, A)$. Considerando B como B-módulo a izquierda, existen elementos de torsión $b_i \in B, i = 1, \dots, n$ tales que $\sum_{i=1}^n b_i = 1$, que no es de torsión.

(16) a) Calcular la torsión de los grupos abelianos $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$.
b) Todo módulo finito sobre un anillo infinito, es de torsión. En particular, los grupos abelianos finitos son de torsión.
c) Un A-módulo M se dice acotado si existe $a \in A$ tal que $a \neq 0$ y $a.M = 0$. Si M es acotado entonces M es de torsión. Si A es un dominio íntegro y M es un módulo finito de torsión entonces M es acotado. En particular, los grupos abelianos finitos son acotados.
d) Sea A un dominio integro y sea K su cuerpo de fracciones. Si S es un A-submódulo de K tal que $1 \in S$ entonces S/A es un A-módulo de torsión. En particular, K/A es de torsión. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un grupo de torsión.
e) Si S es un subgrupo no nulo de $\mathbb{Q}$ entonces $\mathbb{Q}/S$ es un grupo de torsión.
f) Si $J \subset A$ es un ideal a izquierda, A/J es de torsión si y solo si para todo $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $b \neq 0$ y $b.a \in J$. En particular, si J es un ideal bilátero no nulo, A/J es de torsión.

g) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ son sin torsión, ya sea como grupos abelianos o como módulos sobre los precedentes.

h) Sea A un anillo. El grupo abeliano $(A, +)$ es de torsión si y solo si es acotado.

(17) a) $\mathbb{Z}$ es un grupo reducido. (Un módulo es reducido si no admite submódulos divisibles no nulos).
b) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ son divisibles, ya sea como grupos abelianos o como módulos sobre los anteriores.
c) Los espacios vectoriales son divisibles.
d) Son equivalentes:
A es un anillo de división.
ii) A es divisible como A-módulo a izquierda.
iii) A es divisible como A-módulo a derecha.
e) Sea A un dominio íntegro y K su cuerpo de fracciones. Si V es un K-espacio vectorial entonces V es un A-módulo divisible.

(18) Sea A un anillo conmutativo; sean M y N módulos sobre A.
a) Si M es divisible, $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es sin torsión.
b) Si N es sin torsión, $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es sin torsión.
c) Si M es de torsión, $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es reducido.
d) Si N es reducido, $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es reducido.
e) Si M es divisible y N es reducido, $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$.
f) Si M es de torsión y N es sin torsión, $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$.

(19) Sea A un dominio integro, sea K el cuerpo de fracciones de A y sea M un A-módulo.
a) Si M es divisible y sin torsión entonces M admite una estructura canónica de K-espacio vectorial.
b) Definimos $d(M) = \{m \in M : \forall a \in A \setminus \{0\}\ \exists m' \in M$ tal que $am' = m\}$. La aplicacion $\mathrm{Hom}_A(K, M) \to \mathrm{d}(M)$, $f \mapsto f(1)$ es un morfismo de A-módulos. Si M es sin torsión esta aplicacion es un isomorfismo.
c) Si M es sin torsión, M es reducido si y solo si $\mathrm{Hom}_A(K, M) = 0$.

(20) Si un grupo abeliano de torsión es de tipo finito entonces es finito.

(21) Sea A un anillo y M un A-módulo. Si $S \subset M$ genera M, decimos que S es un sistema de generadores minimal si ningún subconjunto propio de S genera M.
a) Probar que un módulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal.
b) Consideramos $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo. Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe en $\mathbb{Z}$ un sistema de generadores minimal con n elementos.
c) $\mathbb{Q}$, visto como $\mathbb{Z}$-módulo, no posee un sistema de generadores minimal.
d) Si A es un cuerpo y M es un A-módulo entonces $S \subset M$ es un sistema de generadores minimal sii S es una base de M. Todo A-módulo M posee una base, y todas las bases de M tienen la misma cardinalidad.

(22) a) Encontrar sistemas de generadores minimales de los grupos:
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^*$, $(\mathbb{Q}^*)^2$, $\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q}/\ p$ no divide $b\}$(p primo).

b) Encontrar sistemas de generadores minimales de $K[x]/ < f >$ (K cuerpo, $f \in K[x]$) como A-módulo, para $A = K$, $A = K[x]$ y $A = K[x]/ < f >$.