Algebra II, 2021/I

Práctica 6

1. Probar que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigoplus_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$.
2. Muestre un algoritmo que permita llevar una matriz a su forma normal de Smith en un DIP (sugerencia: usar que en un DIP vale que $((a:b)) = (a,b)$).
3. Pruebe que la matriz
$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
no es equivalente a una matriz diagonal sobre el anillo $k[x,y]$. Concluya que el teorema de estructura no es válido si no se asume que el anillo es un DIP.
4. Probar que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ no es suma directa de $\mathbb{Z}$-módulos cíclicos. Concluya que el teorema de estructura no es válido si no se asume que el módulo no es finitamente generado.
5. Calcular los divisores elementales de los siguientes grupos abelianos:
    a) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$.
    b) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$.
    c) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$.
    d) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.
    e) G un grupo abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tiene elementos de orden 4.
6. Determinar los divisores elementales de los grupos abelianos definidos por generadores y relaciones siguientes:
    a) generadores $\{e_1, e_2\}$, relación $3e_1 = 4e_2$.
    b) generadores $\{e_1, e_2, e_3\}$, relaciones $2e_1 + 2e_2 + 2e_3 = 0$ y $3e_1 = 6e_3$.
    c) generadores $\{e_1, e_2, e_3\}$, relaciones $3e_1 = e_2$ y $e_2 = 3e_3$.
7. Determinar todas las clases de isomorfismo de grupos abelianos de ordenes 8, 16, 180 y 210 respectivamente.
8. Sea A un grupo abeliano de orden n.
    a) Si r es un divisor de n entonces A posee subgrupos de orden r. Si r es primo entonces A posee elementos de orden r.

b) Si $a \in A$ posee orden maximal (entre los ordenes de elementos de A) entonces a genera un sumando directo de A.

c) Si n es libre de cuadrados entonces A es cíclico.

9. Caracterizar los grupos abelianos finitamente generados tales que:

    a) Todo subgrupo propio de G es cíclico.

    b) Todo subgrupo propio de G es de orden primo.

    c) G posee exactamente 2 subgrupos propios no nulos.

    d) G posee exactamente 3 subgrupos propios no nulos.

    e) Todo subgrupo propio no nulo de G es maximal.

    f) Para todo par de subgrupos S y T de G, ST o $T \subseteq S$.

    g) El orden de todo elemento no nulo de G es primo.

    h) G/S es cíclico para todo subgrupo S no nulo de G.

    i) Todo par de subgrupos propios no nulos son isomorfos

10. Sean A, B, C grupos abelianos de tipo finito.

    a) $A \oplus A \cong B \oplus B$ implica $A \cong B$.

    b) $A \oplus C \cong B \oplus C$ implica $A \cong B$.

    c) Las afirmaciones análogas a a) y b) para módulos finitamente generados sobre anillos mas generales que $\mathbb{Z}$ son falsas.

11. Determinar todas las clases de isomorfismo de módulos sobre $\mathbb{C}[t]$ que como espacio vectorial complejo tienen dimensión 2. Análogo problema para dimensiones 3 y 4.

    Determinar todas las formas canónicas de Jordan de matrices complejas de $n \times n$ para $n = 2, 3$ y 4.

12. Hallar la forma normal racional y la forma normal de Jordan de un endomorfismo nilpotente.

13. Hallar la forma normal racional y la forma normal de Jordan de las siguientes matrices complejas:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

14. Dar ejemplos de matrices $a, b \in M(n \times n, K)$ no semejantes, con el mismo polinomio minimal y el mismo polinomio característico.

15. Sea A un dominio de ideales principales con cuerpo de fracciones K y sea M un A-modulo de tipo finito.

    Denotamos $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ y $M' = \mathrm{Hom}_A(M, K/A)$ (*-dual y '-dual de M).

    a) M es de torsion sii $M^* = 0$ sii $M \cong M'$.

    b) M es sin torsión sii M es libre sii $M \cong M^*$.

    c) Dado un submódulo $S \subset M$ y $m \in M - S$, existe $\varphi \in M'$ tal que $\varphi(S) = 0$ y $\varphi(m) \neq 0$. En particular, $M' = 0$ sii $M = 0$.

    d) Sean $\alpha : M \to M^{**}$ y $\beta : M \to M''$ los morfismos naturales. Entonces $\ker(\alpha) = \mathrm{t}(M)$ y $\ker(\beta) = 0$. Si M es libre entonces α es un isomorfismo. Si M es de torsion entonces β es un isomorfismo.