Algebra II, 2021/I

Práctica 5

1. Sea A un dominio de integridad y M un $A-$módulo.
   a) Sea $S \subseteq A$ multiplicativamente cerrado. Probar que $S^{-1}t(M) = t(S^{-1}M)$.
   b) Probar que M es libre de torsión si y sólo si $M_{\mathfrak{p}}$ es libre de torsión para cada primo $\mathfrak{p}$.
   c) Probar que M es de torsión si y sólo si $M_{\mathfrak{p}}$ es de torsión para cada $\mathfrak{p}$ primo.

2. Sea M un A-módulo. Si $S \subset M$ es un subconjunto y $N \subset M$ es un submódulo, se llama transportador de S en N a

$$(N : S) = \{a \in A / a.s \in N, \forall s \in S\}.$$

   Si $x \in M$, $(N : \{x\})$ sera indicado -por abuso de notación- $(N : x)$.
   a) $(N : S)$ es un ideal a izquierda de A.
   b) $(0 : S) = \mathrm{An}(S)$.
   c) $(N : S) = A$ sii $S \subset N$.
   d) $(N : \bigcup_{j\in J} S_j) = \bigcap_{j\in J}(N : S_j)$.
   e) si $S \subset T$ entonces $(N : T) \subset (N : S)$.
   f) $(N^J : M^J) = (N^{(J)} : M^{(J)}) = (N : M)$ si $J \neq \varnothing$.
   g) Si $S \subset M$ es A-estable entonces $(N : S)$ es un ideal bilátero de A.
   h) $(\bigcap_{j\in J} N_j : S) = \bigcap_{j\in J}(N_j : S)$.
   i) si $N \subset P$ entonces $(N : S) \subset (P : S)$.
   j) $(N : x).x = N \cap A.x$
   k) si A es conmutativo y I , J son ideales de A, existe un isomorfismo natural de A-módulos $(I : J)/I \cong \mathrm{Hom}_A(A/J, A/I)$.

3. Sea A un anillo y M un A-módulo. M se dice localmente cíclico si todo submódulo de M de tipo finito es cíclico.
   a) Si M es localmente cíclico, todo submódulo de M es localmente cíclico.

b) Sea $f : M \to N$ un epimorfismo de A-módulos. Si M es localmente cíclico entonces también lo es N.

c) Si A es un dominio de ideales principales y K es el cuerpo de fracciones de A entonces K y K/A son A-módulos localmente cíclicos.

d) $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son grupos abelianos localmente cíclicos, pero no son de tipo finito. Concluir que estos grupos no son finitamente generados.

Módulos libres

4. a) Existen módulos libres con elementos no nulos que son linealmente dependientes pero no son múltiplos.

   b) Si L es un A-módulo libre y $x \in L$ es un elemento no nulo, todo miembro del ideal anulador de x es divisor de cero. En particular, si A es íntegro entonces todo elemento no nulo de L es linealmente independiente.

   c) Existen módulos no libres tales que todo elemento no nulo es linealmente independiente (considerar el cuerpo de fracciones de A).

   d) Existen módulos libres que admiten submódulos no libres.

   e) Existen módulos libres que admiten submódulos libres que no son sumandos directos.

   f) Todo módulo sobre un anillo de división es libre.

   Sugerencia: utilizando el lema de Zorn, demostrar que existe un conjunto linealmente independiente maximal.

5. El grupo abeliano $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ no es libre.

   (hay una demostracion en “Infinite abelian groups” por I. Kaplansky, pag. 48).

   Comentario: si K es un cuerpo, según el ejercicio 4. f) el K-módulo $K^{\mathbb{N}}$ es libre, aunque no parece ser fácil exhibir una base.

6. Sea A un anillo y M un A-módulo a izquierda.

   a) Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia de submódulos cíclicos no nulos de M tal que I es infinito y M es suma directa interna de los M_i. Probar que para todo sistema de generadores S de M resulta $\mathrm{card}(S) \geq \mathrm{card}(I)$.

   (si es necesario ver “Lectures in Abstract Algebra” por N. Jacobson, vol. II, pag. 241).

   b) En las condiciones de a), si $(N_j)_{j \in J}$ es otra familia de submódulos ciclicos no nulos tal que M es suma directa interna de los N_j entonces $\mathrm{card}(J) = \mathrm{card}(I)$.

   c) Si M admite una base infinita B, para todo sistema de generadores S de M resulta $\mathrm{card}(S) \geq \mathrm{card}(B)$. Para toda otra base B' de M se verifica $\mathrm{card}(B') = \mathrm{card}(B)$; en particular, toda otra base B' de M es infinita.

d) Existen módulos libres que admiten bases finitas no coordinables. Por ejemplo, sea M un A-módulo libre con base $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, y sea B el anillo $\mathrm{End}_A(M)$. Si $u, v \in B$ están definidos por

$u(x_{2i}) = x_i$, $\;u(x_{2i+1}) = 0$ y $v(x_{2i}) = 0$, $\;v(x_{2i-1}) = x_i$ entonces $\{u, v\}$ es una base de B como B-módulo. Deducir que $B \cong B^2$ y que $B^n \cong B^m$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

7. Sea D un anillo de división y V un D-módulo.

   a) (Lema de agregado) Si $(x_i)_{i\in I}$ es una familia linealmente independiente de elementos de V y $x \in V$ no es combinación lineal de los x_i entonces la familia que se deduce de $(x_i)_{i\in I}$ agregando el elemento x, es linealmente independiente.

   b) (Lema de intercambio) Si $(x_i)_{i\in I}$ es una familia linealmente independiente de elementos de V y $(y_j)_{j\in J}$ es una familia de generadores de V, para todo $p \in I$ existe $j \in J$ tal que la familia que se deduce de $(x_i)_{i\in I}$ reemplazando x_p por y_q, es linealmente independiente.

   c) Si V admite una base finita, toda otra base es finita y del mismo cardinal.

   d) Si V es un espacio vectorial, dos bases cualesquiera de V son coordinables.

8. Se dice que un anillo A tiene noción de rango si para todo A-módulo libre L todas las bases de L tienen el mismo cardinal (en cuyo caso, ese cardinal se denomina rango de L). Por 6. c), basta con considerar L con base finita. Equivalentemente, A tiene noción de rango si, para $n, m \in \mathbb{N}$, $A^n \cong A^m$ implica $n = m$.

   a) Supongamos que el anillo B tiene noción de rango y que existe un morfismo de anillos $A \to B$. Entonces A tiene noción de rango.

   b) Un anillo de división tiene noción de rango.

   c) Un anillo conmutativo tiene noción de rango.

   Sug.: utilizar la existencia de un ideal maximal.

   d) El anillo de 6. d) no tiene noción de rango.

Sucesiones exactas

9. Sea A un anillo conmutativo y S un subconjunto multiplicativamente cerrado.

   a) Probar que si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta, entonces $0 \to S^{-1}M' \to S^{-1}M \to S^{-1}M'' \to 0$ también es exacta.

   b) Si M es un A-módulo y $N \subseteq M$ un submódulo entonces $S^{-1}(M/N) \simeq (S^{-1}M)/(S^{-1}N)$.

   c) Si $\{M_t\}_{t\in T}$ es una familia de $A-$módulos, entonces $S^{-1}\bigoplus_{t\in T} M_t \simeq \bigoplus_{t\in T} S^{-1}M_t$. ¿Qué sucede con el producto?

10. Sea A un anillo conmutativo y $f : M \to N$ un morfismo de $A-$módulos. Para cada ideal $\mathfrak{p}$ primo, denotamos $f_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ el morfismo inducido en las localizaciones.

    a) Probar que f es un monomorfismo si y sólo si $f_{\mathfrak{p}}$ es un monomorfismo para todo ideal primo $\mathfrak{p}$.

    b) Probar que f es un epimorfismo si y sólo si $f_{\mathfrak{p}}$ es un epimorfismo.

    c) Concluir que una sucesión $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es exacta si y sólo si lo es al localizarla en cada ideal primo.

11. *Lema de los cinco* Consideremos un diagrama conmutativo de A-módulos izquierdos

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

    y supongamos que las dos filas son exactas.

    a) Si α_1, α_2, α_4 y α_5 son isomorfismos, entonces α_3 es un isomorfismo.

    b) Si α_1 es sobreyectivo y α_2 y α_4 son inyectivos, entonces α_3 es inyectivo.

    c) Si α_5 es inyectivo y α_2 y α_4 son sobreyectivos, entonces α_3 es sobreyectivo.

12. *Lema de los nueve*. Consideremos un diagrama de A-módulos izquierdos

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

    en el que las tres columnas y las dos primeras (resp. las dos últimas) filas son exactas. Entonces la tercera (resp. la primera) fila también es exacta.

13. Considere la sucesión exacta corta de A-módulos

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

a) Pruebe que si M' y M'' son finitamente generados, entonces M es finitamente generado. ¿Es cierta la otra implicación?

b) Si M' y M son finitamente presentados, entonces M'' es finitamente presentado.

c) Si M es finitamente presentado y M' es finitamente generado, entonces M'' es finitamente presentado (Sugerencia: acomode todo en un diagrama y siga las flechas).

14. Dar un ejemplo de un A-módulo que no admita una presentación finita.

Módulos noetherianos y módulos artinianos

15. Sea A un anillo conmutativo y M un A-módulo. Si todo conjunto no vacío de submódulos finitamente generados de M tiene un elemento maximal entonces M es noetheriano.

16. Sea A un anillo conmutativo, M un A-módulo y $N, N' \subset M$ submódulos.

    Si M/N y M/N' son noetherianos (resp. artinianos) entonces $M/N \cap N'$ es noetheriano (resp. artiniano).

17. Sea A un anillo conmutativo y $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Denotamos $K_n = \ker(f^n)$ e $I_n = \mathrm{im}(f^n)$.

    a) Si $K_1 = K_2$ entonces $K_1 \cap I_1 = 0$. Si $I_1 = I_2$ entonces $K_1 + I_1 = M$.

    c) Si M es noetheriano (resp. artiniano) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap I_n = 0$

    (resp. $K_n + I_n = M$).

    c) Si M es noetheriano (resp. artiniano) y f es epimorfismo (resp. monomorfismo) entonces f es isomorfismo.

18. Sea L un cuerpo, K un subcuerpo de L y $f : L \to K$ un morfismo de anillos sobreyectivo. En el conjunto $A = L \times L$ se definen operaciones $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, $(x, y).(x', y') = (x.x', x.y' + y.f(x'))$.

    a) $(A, +, .)$ es un anillo.

    b) El único ideal a izquierda no trivial de A es $\{0\} \times L$; pero $\{0\} \times S$ es un ideal a derecha para todo K-subespacio lineal S de L.

    c) A es un anillo artiniano a izquierda; pero no es artiniano ni noetheriano a derecha, si L tiene K-dimension infinita.

19. Sea k un cuerpo y A una $k-$álgebra tal que $\dim_k A < \infty$. Entonces A es un anillo artiniano.

20. a) Sea K un cuerpo y $m, n \in \mathbb{N}$.

    Probar que el anillo $A = K[x_1, \ldots, x_n]/ < x_1, \ldots, x_n >^m$ es artiniano.

(si J es un ideal, J^m denota el ideal generado por los productos de m elementos de J)

b) Si $J \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal tal que $< x_1, \ldots, x_n >^m \subset J$ para algún m, entonces $K[x_1, \ldots, x_n]/J$ es un anillo artiniano. Dar ejemplos de tales J.

21. a) Sea A el anillo de funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que A no es noetheriano.

    b) (Opcional) Sea A el anillo de funciones holomorfas $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Probar que A no es noetheriano.