ALGEBRA II, 2021/I

PRÁCTICA 2

(1) (grupo asociado a un monoide conmutativo)
Sea $(N, +)$ un monoide conmutativo. En el grupo producto $N \times N$ definimos la relación $(x, y)R(x', y')$ si existe $z \in N$ tal que $z + x + y' = z + x' + y$. Verificar que R es una relación de equivalencia compatible con la operación de grupo. Verificar que la operación cociente define una estructura de grupo en el conjunto cociente $N \times N/R$. Este grupo sera denotado $G(N)$. La aplicación $j : N \to G(N)$ tal que $j(n) =$ clase de $(n, 0)$ es un morfismo de monoides; j es inyectiva si y solo si en N vale la ley cancelativa ($x + z = y + z$ implica $x = y$). Deducir que en un monoide conmutativo vale la ley cancelativa si y solo si el monoide se puede inyectar en un grupo. Se define $\mathbb{Z} = G(\mathbb{N})$.

(2) (cuerpo de fracciones de un dominio)
Sea A un dominio (=anillo conmutativo sin divisores de cero). En $A \times A - \{0\}$ definimos la relación $(x, y)R(x', y')$ si $x.y' = x'.y$. Verificar que R es una relación de equivalencia. La clase de (x, y) se denota x/y. Definimos operaciones en $A \times A - \{0\}$: $(x, y).(x', y') = (x.x', y.y')$ y $(x, y) + (x', y') = (x.y' + x'.y, y.y')$. Verificar que estas operaciones son compatibles con R y definen en el conjunto cociente una estructura de anillo. Verificar que este anillo es un cuerpo, denotado $K(A)$. Se define $\mathbb{Q} = K(\mathbb{Z})$. También se denota $A(t) = K(A[t])$ (cuerpo de funciones racionales en una variable) y $A((t)) = K(A[[t]])$.

(3) (construcción del cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales).
Consideremos el anillo producto $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$: un elemento de este anillo es una sucesión de números racionales, las operaciones de anillo son coordenada a coordenada.
   a) Probar que el subconjunto $Ca \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ de la sucesiones de Cauchy, es un subanillo.
   b) Probar que el subconjunto $Ce \subset Ca$ de la sucesiones que convergen a cero, es un ideal.
   c) Definimos $\mathbb{R} = Ca/Ce$ (anillo cociente). Verificar que $\mathbb{R}$ es un cuerpo.
   Nota: se demuestra que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado arquimediano completo, y que es el único cuerpo con estas propiedades.

(4) Sea A un anillo conmutativo y $x \in A$ un elemento nilpotente (es decir, $x^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$). Probar que $1 + x$ es una unidad en A. Deducir que la suma de un elemento nilpotente y una unidad es una unidad.

(5) Supongamos que A es un anillo conmutativo.
   a) $A[[x]]$ es de integridad sii $A[x]$ es de integridad, si y solo si A es de integridad.
   b) Un elemento $p = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \in A[x]$ es una unidad si y solo si $p_0 \in A$ es una unidad y $p_1, \ldots, p_n$ son nilpotentes.

c) Un elemento $p = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i \in A[[x]]$ es una unidad sii $p_0 \in A$ es una unidad. Si p es nilpotente entonces p_i es nilpotente para todo i. Vale la reciproca ?

(6) Describir los anillos:
a) $\mathbb{Z}[x]/(2, x)$
b) $\mathbb{Z}[x]/(2)$
c) $\mathbb{Z}[x]/(2x)$
d) $\mathbb{Z}[i]/(2)$ donde $\mathbb{Z}[i] = \{z = a + b.i/a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ es el anillo de enteros de Gauss.
e) $\mathbb{Z}/(6, 4)$
f) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$
g) $\mathbb{Z}[x]/(1 + x + x^2)$
h) $\mathbb{Z}[i]/(i)$
i) $\mathbb{Z}[i]/(1 + i)$
j) $\mathbb{Z}[i]/(2, 1 + i)$
k) $\mathbb{Z}[i]/(1 + i, 1 - 2i)$
l) $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ (álgebra de números duales)

(7) Sea A un anillo y $(S, *)$ un monoide. En el conjunto A^S de todas las funciones $\alpha : S \to A$ definimos dos operaciones:

$$(\alpha + \beta)(s) = \alpha(s) + \beta(s)$$

$$(\alpha.\beta)(s) = \sum_{\{(u,v)\in S\times S/u*v=s\}} \alpha(u).\beta(v)$$

Suponemos que el monoide S es tal que el conjunto $\{(u, v) \in S \times S/u * v = s\}$ es finito para todo $s \in S$ (p. ej. $S \subset \mathbb{N}^k$, o S finito).
a) Verificar que $(A^S, +, .)$ es un anillo, que se denota $A[[S]]$. El anillo $A[[S]]$ es conmutativo si y solo si A y S son conmutativos.
Notación: Es usual escribir un elemento $\alpha \in A^S$ como una suma formal $\sum_{s\in S} \alpha(s).s$. Explicitar las operaciones + y . utilizando esta convención.
b) Verificar que el subconjunto $A^{(S)} \subset A^S$ de funciones con soporte finito ($\alpha(s) = 0$ salvo a lo sumo finitos $s \in S$) es un subanillo, denotado $A[S]$ y llamado álgebra del monoide S con coeficientes en A.
c) Definir isomorfismos $A[[\mathbb{N}^r]] \cong A[[x_1, \dots, x_r]]$ y $A[\mathbb{N}^r] \cong A[x_1, \dots, x_r]$.
d) Verificar que si S es un grupo finito entonces la multiplicación en $A[S]$ se escribe $(\alpha.\beta)(s) = \sum_{t\in S} \alpha(s.t^{-1}).\beta(t)$ (producto de convolución).

(8) Sea $\mathbb{H} = (\mathbb{R}^4, +, .)$ el álgebra de cuaterniones. Para $q = a + b.i + c.j + d.k \in \mathbb{H}$ sea $\bar{q} = a - b.i - c.j - d.k$ el cuaternión conjugado.
a) Verificar que $q.\bar{q} = \bar{q}.q = |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Deducir que $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$ para $q \neq 0$ y que $\mathbb{H}$ es un anillo de división.
b) Exhibir subanillos de $\mathbb{H}$ isomorfos a $\mathbb{C}$.
c) $H = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{H} - \{0\}, .)$. Probar que todo subgrupo de H es normal. Deducir que H no es isomorfo al grupo dihedral D_4.
Se demuestra que H y D_4 son los únicos grupos no conmutativos de orden 8.

(9) Si A es un anillo conmutativo denotamos $GL(n,A)$ el grupo de matrices inversibles de $n \times n$ con coeficientes en A. Calcular el numero de elementos de $GL(n,\mathbb{Z}_p)$ (p primo).

(10) a) Sea A un anillo y $J \subset A$ un ideal a izquierda (resp. derecha, bilátero). Entonces $M(n,J) \subset M(n,A)$ es un ideal a izquierda (resp. derecha, bilátero). Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K y consideremos el anillo $A = \mathrm{End}_K(V)$. Para cada subespacio lineal $U \subset V$ sea $I_U = \{f \in A / U \subset \ker(f)\}$ y $D_U = \{f \in A / \mathrm{im}(f) \subset U\}$.

b) Demostrar que I_U es un ideal a izquierda y D_U es un ideal a derecha.

c) Todo ideal a izquierda (resp. derecha) de A es igual a I_U (resp. D_U) para algún subespacio U.

d) A tiene exactamente dos ideales biláteros.

(11) Sea A un dominio finito. Probar que A es un anillo de división.

(12) Sean I, J y K ideales de un anillo conmutativo A. Probar:

a) $I.J \subset I \cap J$. Dar ejemplos de igualdad y de desigualdad.

b) $(I+J).K = I.K + J.K$

c) $(I.J)^n = I^n.J^n$

(13) En $\mathbb{Z}$

a) $< m > \cap < n > = < [m,n] >$ (mínimo común múltiplo)

b) $< m > + < n > = < (m,n) >$ (máximo común divisor)

c) $< m > . < n > = < m.n >$

d) $< n >$ es primo sii $< n >$ es maximal, sii n es primo .

(14) Sea A un anillo conmutativo. Probar que un ideal $J \subset A$ es maximal sii A/J es un cuerpo. Equivalentemente, un anillo conmutativo es simple (tiene solo dos ideales) sii es un cuerpo. Que pasa si A no es conmutativo ? (considerar $M(n,K)$).

(15) Se dice que un grupo G es simple si los únicos subgrupos normales de G son $\{1\}$ y G. Demostrar que si G es simple y conmutativo entonces es cíclico de orden primo. Otro ejemplo de grupo simple es $\mathbb{A}_n$ con $n \geq 5$ (demostración en [O]).

(16) Sea $A = C^0((0,1),\mathbb{R})$ el anillo de funciones continuas del intervalo $(0,1) \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Probar que $f \in A$ es un divisor de cero si y solo si $\{x/f(x) = 0\}$ contiene un abierto.
Opcional: Si $U \subset \mathbb{C}$ es un abierto, sea A_U el anillo de funciones holomorfas $U \to \mathbb{C}$. Probar que si U es conexo entonces A_U es un dominio de integridad.

(17) a) Un elemento de $\mathbb{Z}_n$ es inversible sii no es divisor de cero.

b) $\mathbb{Z}_n$ es un cuerpo sii es dominio de integridad.

c) $\mathbb{Z}_n$ es un cuerpo sii n es primo.

d) hay correspondencia biyectiva antiordenada entre el conjunto de ideales de $\mathbb{Z}_n$ (ordenados por inclusión) y el conjunto de divisores de n (ordenados por la relación de divisibilidad).

e) Calcular el numero de ideales maximales de $\mathbb{Z}_n$ (en función del numero de primos positivos que dividen n).

f) Un ideal de $\mathbb{Z}_n$ es primo sii es maximal.

g) Caracterizar los elementos nilpotentes (o sea $x^m = 0$) y los elementos idempotentes (o sea $x^2 = x$) de $\mathbb{Z}_n$.

(18) Analizar la existencia de un isomorfismo de anillos:

a) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}[x]$

b) $\mathbb{Z}[\pi] \subset \mathbb{R}$ ($\pi = 3,1416\dots$) y $\mathbb{Z}[x]$.

c) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

d) $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

e) $\mathbb{H}$ y $M(2,\mathbb{R})$ (para mas información ver [**?**].

f) $A[x][y]$ y $A[x,y]$.

g) dos de $A[[x]][y]$, $A[y][[x]]$ y $A[[x,y]]$.

h) $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ y $\mathbb{R}[\cos,\mathrm{sen}] \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}$-subálgebra generada por $\{\cos,\mathrm{sen}\}$).

i) $K(\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)) \cong \mathbb{R}(t)$
Sug.: considerar una proyección estereográfica.

j) $\mathbb{R}[x,y]/(x^2-y^2-1)$ y $\mathbb{R}[t]$

k) $\mathbb{R}[x,y]/(x^3+y^3-1)$ y $\mathbb{R}[t]$