

ALGEBRA II, 2021/I

PRÁCTICA 1

- (1) Sea X un conjunto con una operación interna $*$: $X \times X \rightarrow X$. Para $x_i \in X$ definimos inductivamente

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 * \cdots * x_n = (x_1 * \cdots * x_{n-1}) * x_n$$

Demostrar que si $*$ es asociativa entonces vale

$$\prod_{i=1}^n x_i = \left(\prod_{i=1}^m x_i \right) * \left(\prod_{i=m+1}^n x_i \right)$$

para todo $m \leq n$. Deducir que en un producto se pueden insertar paréntesis de cualquier manera, sin alterar el resultado.

- (2) Con la notación de 1), supongamos que $*$ es asociativa y conmutativa. Demostrar que para toda biyección $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ vale

$$x_1 * \cdots * x_n = x_{\sigma(1)} * \cdots * x_{\sigma(n)}$$

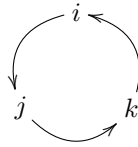
Sea J un conjunto finito y $x : J \rightarrow X$ una función (también escrita $(x_j)_{j \in J}$, pensada como familia de elementos de X parametrizada por el conjunto de índices J). Si $*$ es asociativa y conmutativa, darle sentido a la expresión $\prod_{j \in J} x_j$.

- (3) Sea S el sub-monoide de $(\mathbb{N}, +)$ generado por $\{2, 3\}$. Verificar que $\mathbb{N} = S \cup \{1\}$.
- (4) Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos $\mathbb{N}_{\geq m} = \{n \in \mathbb{N} / n \geq m\} \cup \{0\}$, que es un sub-monoide de $(\mathbb{N}, +)$. Encontrar un conjunto finito de generadores de \mathbb{N}_m .
- (5) a) Sea X un conjunto y X^X el conjunto de todas las funciones $X \rightarrow X$. Si \circ denota composición de funciones entonces (X^X, \circ) es un monoide. El grupo de unidades $\mathbb{S}(X) := U(X^X, \circ)$, consistente de las funciones $X \rightarrow X$ biyectivas, se denomina grupo simétrico de X .
- b) Sea $(X, *)$ un semigrupo. Verificar que el conjunto $\text{End}(X, *)$ de endomorfismos de semigrupo es un sub-monoide de X^X . El conjunto $\text{Aut}(X, *) = U(\text{End}(X, *)) = \text{End}(X, *) \cap \mathbb{S}(X)$ de automorfismos de semigrupo, es un subgrupo de $\mathbb{S}(X)$.
- (6) Dibujar algunos sub-semigrupos de $(\mathbb{R}^n, +)$, ($n = 1, 2, 3$). Se sugiere considerar conos convexos $C \subset \mathbb{R}^n$. Intersecando con sub-semigrupos discretos como \mathbb{N}^n o \mathbb{Z}^n se obtienen ejemplos discretos.
- (7) Sea A el monoide $(\mathbb{N} - \{0\}, \cdot)$ y $B = (\mathbb{N}, +)$. Demostrar que existe un isomorfismo de monoides $A \cong B^{(\mathbb{N})}$.
Sugerencia: usar la descomposición de un número natural como producto de factores primos.

- (8) a) Sea X un conjunto y $P(X)$ el conjunto de partes de X . Verificar que $(P(X), \cup)$ y $(P(X), \cap)$ son monoides y que $c : (P(X), \cup) \rightarrow (P(X), \cap)$ definido por $c(Y) = X - Y$ es un isomorfismo de monoides. Determinar los grupos de unidades de estos monoides.
- b) Sea $Y \subset X$ un subconjunto. Verificar que $(P(Y), \cap)$ es un sub-semigrupo de $(P(X), \cap)$, pero no es un sub-monoide (a menos que $Y = X$).
- (9) Sea \mathbb{H} el conjunto de 8 elementos $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ dotado del producto dado por la siguiente ecuaciones:

$$\begin{aligned} i \cdot j &= k, & j \cdot k &= i, & k \cdot i &= j, \\ j \cdot i &= -k, & k \cdot j &= -i, & i \cdot k &= -j, \\ i \cdot i &= j \cdot j &= k \cdot k &= -1, \end{aligned}$$

y la regla usual de los signos. Mostrar que (\mathbb{H}, \cdot) es un grupo no abeliano. Llamamos a \mathbb{H} el *grupo de cuaterniones*. El siguiente diagrama permite recordar la tabla de multiplicación de \mathbb{H} .



- (10) El grupo simétrico $\mathbb{S}_3 := \mathbb{S}(\{1, 2, 3\})$ es no conmutativo y posee exactamente 6 subgrupos, de los cuales 3 son normales.
- (11) a) Probar que todo grupo de orden ≤ 5 es abeliano. Describir las posibles estructuras.
- b) Existen dos grupos de orden 4 no isomorfos.
- (12) Sea G un grupo cíclico. Demostrar que G es abeliano y que todo subgrupo de G también es cíclico.
- (13) Sea G un grupo. Para $x, y \in G$, el elemento $[x, y] := x.y.x^{-1}.y^{-1} = (x.y).(y.x)^{-1}$ se llama conmutador de (x, y) . Denotamos $[G, G] \subset G$ el subgrupo generado por todos los conmutadores. Verificar que $[G, G]$ es un subgrupo normal y que $G/[G, G]$ es abeliano. Demostrar que todo morfismo de G en un grupo abeliano se factoriza unívocamente a través de $G/[G, G]$.
- (14) a) Sea G un grupo. Se define el centro de G como $Z(G) = \{g \in G/g.x = x.g \ \forall x \in G\}$. Verificar que $Z(G)$ es un subgrupo normal de G .
- b) Determinar el centro del grupo $GL(n, K)$ de matrices inversibles de $n \times n$ sobre el cuerpo K , del grupo de matrices inversibles triangulares superiores $T(n, K)$ y del grupo simétrico \mathbb{S}_n .
- (15) Sea G un grupo y $\text{Aut}(G)$ el grupo de automorfismos de G (ver ejercicio 5). Para cada $g \in G$ se define la conjugación por g , $c_g : G \rightarrow G$, como $c_g(x) = g.x.g^{-1}$. Verificar que:
- a) $c_g \in \text{Aut}(G)$ (un automorfismo de la forma c_g se denomina automorfismo interior)
- b) la aplicación $c : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ tal que $c(g) = c_g$ es un morfismo de grupos.
- c) $\ker(c) = Z(G)$. Deducir que el grupo de automorfismos interiores es isomorfo a $G/Z(G)$.

d) si $g \in G$ y $\varphi \in \text{Aut}(G)$ entonces $\varphi \circ c_g \circ \varphi^{-1} = c_{\varphi(g)}$. Deducir que $\text{im}(c)$ es un subgrupo normal de $\text{Aut}(G)$. El grupo $\text{Aut}(G)/\text{im}(c)$ de "automorfismos exteriores" es un interesante invariante de G .

Comentario: a veces se utiliza la notación $g^{-1}.x.g = x^g$, de manera que a) se escribe $(x.y)^g = x^g.y^g$, mientras que b) dice $(x^g)^h = x^{g.h}$.

- (16) Sea G un grupo y $K \subset H$ subgrupos de G . Si K es normal en H y H es normal en G , es cierto que K es normal en G ?
- (17) Si H y K son subgrupos propios de un grupo G entonces $H \cup K \neq G$. Es valido lo mismo para tres subgrupos propios?
- (18) Dar contraejemplos a la siguiente afirmación: "Si H y K son subgrupos de G entonces $H.K$ es un subgrupo de G ". Probar que $H.K$ es un subgrupo si, y solo si, $H.K = K.H$ (Definición: $H.K = \{h.k/h \in H, k \in K\}$).
- (19) Si H y K son subgrupos normales de G entonces existe un monomorfismo

$$f : G/(H \cap K) \rightarrow G/H \times G/K$$

Considerar también el caso de tres o mas subgrupos.

- (20) Si H es un subgrupo de G de índice 2 entonces H es normal.
- (21) Sea $O(n, \mathbb{R})$ (denominado "grupo ortogonal") el grupo de transformaciones lineales $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preservan distancia (una tal transformación corresponde a una matriz $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $A.A^t = I$). Para cada subconjunto $P \subset \mathbb{R}^n$ definimos los grupos $O(P) = \{A \in O(n, \mathbb{R})/A(P) = P\}$ y $SO(P) = \{A \in O(n, \mathbb{R})/A(P) = P, \det(A) = 1\}$. Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ un tetraedro regular. Demostrar que $SO(P)$ es isomorfo al grupo alternado \mathbb{A}_4 .
Sugerencia: Ver [O'B73, pág.7] y considerar la acción de $SO(P)$ sobre los vértices de P .
- (22) Sea H un subgrupo normal de G . Para que G sea isomorfo a $H \times G/H$ es necesario y suficiente que el morfismo de inclusión $H \rightarrow G$ sea una sección.
- (23) Sea G un grupo. Decidir cuales de las siguientes propiedades son verdaderas y cuales falsas. Justificar.
- $a^n.b^n = (a.b)^n$, $n \in \mathbb{N}$
 - $(a.b.a^{-1})^n = a.b^n.a^{-1}$
 - Si $a^2 = e$ y $b^2 = e$ entonces $(a.b)^2 = e$.
- (24) Probar que un grupo de orden 30 tiene a lo sumo 7 subgrupos de orden 5.
- (25) Si G es un grupo tal que $g^2 = e$ para todo $g \in G$ entonces G es conmutativo.
- (26) Probar que:
- si H es un subgrupo de \mathbb{Z} entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $H = n\mathbb{Z}$.
 - si H es un subgrupo discreto de \mathbb{R} entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $H = x\mathbb{Z}$.
 - si H es un subgrupo finito de \mathbb{C}^* entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H = G_n$ (raíces n -esimas de 1).
- (27) Calcular $[G, G]$ (Ej. 12) en los siguientes casos:
- $G = SL(2, \mathbb{R})$
 - $G = GL(2, \mathbb{R})$
 - $G = D_n$ (grupo dihedral).
 - $G = \mathbb{S}_n$

- (28) Si G es un conjunto y K un grupo sea K^G el conjunto de funciones $G \rightarrow K$ con estructura de grupo dada por $(\alpha * \beta)(g) = \alpha(g) \cdot \beta(g)$, $g \in G$. Si G es también un grupo, sea $\text{Hom}(G, K) \subset K^G$ el conjunto de morfismos de grupo. Verificar que si K es conmutativo entonces $\text{Hom}(G, K)$ es estable, y por lo tanto hereda un estructura de grupo. Calcular:
- $\text{Hom}(D_n, \mathbb{Z})$
 - $\text{Hom}(\mathbb{Z}, D_n)$
 - $\text{Hom}(D_3, D_3)$
 - $\text{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$
 - $\text{Hom}(\mathbb{S}_n, G_2) = \{1, \text{sg}\}$
 - $\text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m)$
 - $\text{Hom}(G, K) = \{1\}$, donde G y K son grupos finitos cuyos ordenes son coprimos.
 - $\text{Hom}(\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_m)$ ¹
- (29) (grupo simétrico)
- Sea $\sigma = (1, 2, \dots, n) \in \mathbb{S}_n$ un n -ciclo. Verificar que $\tau \cdot \sigma \cdot \tau^{-1} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ para cualquier $\tau \in \mathbb{S}_n$. Deducir que la clase de conjugación de σ tiene $(n-1)!$ elementos, y que el centralizador de σ es el grupo cíclico generado por σ .
 - Para $\alpha \in \mathbb{S}_n$ consideremos la descomposición $\alpha = \prod_{i=1}^a \alpha_i$ como producto de ciclos disjuntos, escrita de manera que las longitudes (=ordenes) $|\alpha_i|$ verifican $|\alpha_i| \leq |\alpha_{i+1}|$. Decimos entonces que $(a; |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_a|)$ es el tipo de descomposición de α . Demostrar que $\alpha, \beta \in \mathbb{S}_n$ son conjugados si y solo si tienen el mismo tipo de descomposición.
 - \mathbb{S}_n es generado por las trasposiciones $(12), (13), \dots, (1n)$.
 - \mathbb{S}_n es generado por las trasposiciones $(12), (23), \dots, (n-1 n)$.
 - \mathbb{S}_n es generado por $\{(12), (1, 2, \dots, n)\}$ (o por $\{\tau, \sigma\}$ donde τ es una trasposición y σ un n -ciclo).
 - \mathbb{A}_n es generado por 3-ciclos.
- (30) a) Probar que \mathbb{A}_4 , el cual es un grupo de orden 12, no tiene subgrupos de orden 6. Concluir que no vale la recíproca del Teorema de Lagrange.
- b) Demuestre que si G es un grupo cíclico finito y m es un divisor de $|G|$, entonces existe un subgrupo $H \subseteq G$ tal que $|H| = m$.
- (31) Sea G un grupo y $\alpha : G \times X \rightarrow X$ una acción de G sobre un conjunto X . Se dice que α es transitiva si $\forall x, y \in X, \exists g \in G/y = g \cdot x$ (o sea, hay una sola orbita de G en X). Para $n \in \mathbb{N}$, se dice que α es n -transitiva si la acción sobre el conjunto
- $$X^{(n)} = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\}$$
- definida por $g \cdot (x_1, \dots, x_n) = (g \cdot x_1, \dots, g \cdot x_n)$, es transitiva. Verificar que
- La acción natural de \mathbb{S}_n sobre $X = \{1, 2, \dots, n\}$ es n -transitiva, mientras que la acción de \mathbb{A}_n es $(n-2)$ -transitiva.

¹Se trata de estimar el cardinal del conjunto de homomorfismos (es un conjunto, no es necesariamente un grupo). Y también de describir o construir los posibles homomorfismos. No conocemos la respuesta general a este problema. Posiblemente es difícil. Pero sugerimos investigar casos con n o m pequeños.

- b) Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K . Describir las orbitas de las acciones de $GL(V)$ sobre V y sobre $V \times V$.
- c) (equivalencia de matrices) Consideremos la acción de $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R})$ sobre el conjunto de matrices $M(n \times m, \mathbb{R})$ reales de $n \times m$, definida por $(P, Q)(A) = P.A.Q^{-1}$. Describir las orbitas de esta acción.
Sugerencia: considerar el rango de A .
- d) (semejanza de matrices) Se tiene también la acción de $GL(n, \mathbb{C})$ sobre $M(n \times n, \mathbb{C})$ definida por $P(A) = P.A.P^{-1}$. Describir las orbitas.
Sugerencia: considerar la forma de Jordan de A .
- (32) Es \mathbb{S}_3 producto directo de subgrupos propios?
- (33) Un grupo cíclico de orden $r.s$ es isomorfo al producto de subgrupos cíclicos de ordenes r y s si y solo si r y s son coprimos.
- (34) Sea G un grupo de orden $n = a.b$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Supongamos que existen subgrupos $H \subset G$ y $K \subset G$ de ordenes a y b respectivamente. Demostrar que si $H \cap K = \{1\}$ entonces $H.K = G$. Es G isomorfo al producto $H \times K$?

REFERENCES

- [O'B73] Horacio O'Brien. *Estructuras algebraicas III: Grupos finitos*. O.E.A, 1973.