RECUPERATORIO DEL PRIMER PARCIAL - 12/08/2020
RESOLUCIÓN

1. Considerar el problema:

$$u_{tt}(x,t) + u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0, \tag{1}$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad t > 0, \tag{2}$$
$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0 \qquad 0 < x < \pi. \tag{3}$$

(a) Usar el método de separación de variables para hallar una solución formal de (1)-(2)-(3).

(b) Establecer condiciones sobre la función f para que la solución hallada en el ítem anterior sea una solución clásica de (1)-(2)-(3).

Resolución.

(a) Suponemos que el problema (1)-(2)-(5) admite una solución no nula de la forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \qquad x \in [0,\pi],\ t > 0.$$

A partir de (1) y (3) se ve que X debe ser solución de:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \qquad x \in (0,\pi), \tag{4}$$
$$X(0) = X(\pi) = 0, \tag{5}$$

y que T debe ser solución de:

$$T''(t) + T'(t) - \lambda T(t) = 0 \qquad t > 0, \tag{6}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.
<u>Si $\lambda = 0$</u> entonces la solución general del (4) es:

$$X(x) = Ax + B \qquad x \in (0,\pi) \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Para que una función de esta forma verifique (5) se debe tener $A = B = 0$. Entonces descartamos $\lambda = 0$.
<u>Si $\lambda > 0$</u> entonces el polinomio característico asociado a (4) admite dos soluciones reales distintas, $\pm\sqrt{\lambda}$. Luego la solución general de (4) es

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \qquad x \in (0,\pi) \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Nuevamente, para que una función de esta forma verifique (5) se debe tener $A = B = 0$. Entonces descartamos $\lambda > 0$.
<u>Si $\lambda < 0$</u> entonces el polinomio característico asociado a (4) admite dos soluciones complejas dada por $\pm\sqrt{|\lambda|}i$. Luego, la solución general de (4) es

$$X(x) = A\sin(\sqrt{|\lambda|}\,x) + B\cos(\sqrt{|\lambda|}\,x) \qquad x \in (0,\pi) \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Para que X verifique $X(0) = 0$, debe ser $B = 0$. Luego, para que X verifique $X(\pi) = 0$, sin ser X la función nula, debe ser $\sqrt{|\lambda|} = k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces, cualquier función de la forma:

$$X_k(x) = \sin(kx) \qquad x \in (0,\pi), \quad k \in \mathbb{N}.$$

es una solución no nula de (4)-(5), siempre que $\lambda = -k^2$.
Para $\lambda = -k^2$, $k \in \mathbb{N}$, el polinomio característico asociado a (6) admite dos soluciones complejas distintas, $-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4k^2-1}$. Entonces, la solución general de (6) está dada por:

$$T_k(t) = e^{-t/2}\left(A_k \cos(\gamma_k t) + B_k \sin(\gamma_k t)\right) \qquad t > 0, \quad k \in \mathbb{N} \qquad (A_k, B_k \in \mathbb{R}),$$

donde hemos anotado:

$$\gamma_k := \frac{1}{2}\sqrt{4k^2-1}. \tag{7}$$

Entonces, cualquier función de la forma:

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = e^{-t/2}\sin(kx)\left(A_k \cos(\gamma_k t) + B_k \sin(\gamma_k t)\right) \qquad x \in (0,\pi),\ t > 0,$$

satisface de (1) y (3).
Ahora proponemos una solución de (1)-(2)-(3) de la forma:

$$u(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) \qquad x \in [0,\pi],\ t \geq 0, \tag{8}$$

donde $u_k(x,t) := X_k(x)T_k(t)$ y los coeficientes A_k y B_k que aparecen en la definición de T_k son a determinar, para cada $k \in \mathbb{N}$. Para que esta función verifique (2), se debe tener:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx) \qquad \text{y} \qquad u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}(-(1/2)A_k + \gamma_k B_k)\sin(kx),$$

para $x \in (0,\pi)$, $t \geq 0$. Para obtener la segunda condición hemos derivado formalmente término a término u y usado que

$$\partial_t u_k(x,t) = e^{-t/2}\sin(kx)\left((-\frac{1}{2}A_k + \gamma_k B_k)\cos(\gamma_k t) - (\frac{1}{2}B_k + \gamma_k A_k)\sin(\gamma_k t)\right),$$

para cada k, $x \in (0,\pi)$, $t > 0$.
Para que se cumplan $u(x,0) = f(x)$ y $\partial_t u(x,0) = 0$, elegimos:

$$A_k = A_k(f) := \frac{2}{\pi}\int_0^{\ell} f(x)\sin(kx)dx, \qquad B_k = \frac{A_k(f)}{2\gamma_k} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Hemos obtenido que

$$\begin{aligned} u(x,t) &:= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k(f)\, e^{-t/2}\sin(kx)\left(\cos(\gamma_k t) + (2\gamma_k)^{-1}\sin(\gamma_k t)\right) \qquad x \in [0,\pi],\ t \geq 0, \end{aligned} \tag{9}$$

es una solución formal de (1)-(2).

(b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0,\pi]$ y $t \geq 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}
u_k(x,t) &= A_k(f)e^{-t/2}\sin(kx)\left(\cos(\gamma_k t) + (2\gamma_k)^{-1}\sin(\gamma_k t)\right),\\
\partial_x u_k(x,t) &= kA_k(f)e^{-t/2}\cos(kx)\left(\cos(\gamma_k t) + (2\gamma_k)^{-1}\sin(\gamma_k t)\right),\\
\partial_{xx} u_k(x,t) &= -k^2A_k(f)e^{-t/2}\sin(kx)\left(\cos(\gamma_k t) + (2\gamma_k)^{-1}\sin(\gamma_k t)\right),\\
\partial_t u(x,t) &= (-k^2/\gamma_k)A_k(f)e^{-t/2}\sin(kx)\sin(\gamma_k t),\\
\partial_{tt} u(x,t) &= (-k^2/\gamma_k)A_k(f)e^{-t/2}\sin(kx)\left(\gamma_k\cos(\gamma_k t) - (1/2)\sin(kx)\right),\\
\partial_{tx} u_k(x,t) = \partial_{xt} u_k(x,t) &= (-k^3/\gamma_k)A_k(f)e^{-t/2}\cos(kx)\sin(\gamma_k t).
\end{aligned}$$

Hemos usado que $\gamma_k^2 = k^2 - 1/4$. Luego, encontramos las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned}
|u_k(x,t)| &\leq (1+(2\gamma_k)^{-1})|A_k(f)| \leq C\,|A_k(f)|,\\
|\partial_x u_k(x,t)| &\leq k(1+(2\gamma_k)^{-1})|A_k(f)| \leq kC\,|A_k(f)|,\\
|\partial_{xx} u_k(x,t)| &\leq k^2(1+(2\gamma_k)^{-1})|A_k(f)| \leq k^2C\,|A_k(f)|,\\
|\partial_t u(x,t)| &\leq (k^2/\gamma_k)|A_k(f)| \leq |A_k(f)|,\\
|\partial_{tt} u(x,t)| &\leq (k^2/\gamma_k)(\gamma_k + 1/2)|A_k(f)| \leq kC|A_k(f)|,\\
|\partial_{tx} u_k(x,t)| = |\partial_{xt} u_k(x,t)| &\leq (k^3/\gamma_k)|A_k(f)| \leq k|A_k(f)|,
\end{aligned}$$

donde C es una constante positiva. Hemos usado que $1 \leq k^2 < \gamma_k < k + 1/2$. Entonces, tanto u_k como sus derivadas parciales hasta el orden 2 se pueden acotar uniformemente en $[0,\pi] \times [0,\infty)$ por un término de la forma:

$$Ck^2|A_k(f)|.$$

Para tener

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2|A_k(f)| < \infty, \tag{10}$$

podemos pedir:

$$f \in C^2([0,\pi]), \quad f^{(3)} \text{ continua a trozos en } [0,\pi]), \quad f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = 0, \tag{11}$$

ver Teorema 4 en los Ejercicios Resueltos para la Práctica 2, o bien podemos pedir:

$$f \in C^2([0,\pi]), \quad f'' \in AC([0,\pi]), \quad f^{(3)} \in L^2(0,\pi), \quad f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = 0. \tag{12}$$

Bajo estas últimas condiciones se tiene que la serie de Fourier de $\tilde{f}^{(3)}$ se obtiene derivando tres veces término a término la serie de Fourier de $\tilde{f}$, donde $\tilde{f}$ es la extensión periódica a $\mathbb{R}$ de la extensión impar de f a $[-\pi,\pi]$. Como $\tilde{f}^{(3)} \in L^2(0,\pi)$, usando la desigualdad de Bessel obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^3|A_k(f)|)^2 < \infty.$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2|A_k(f)| = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 k|A_k(f)|\frac{1}{k} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}(k^3|A_k(f)|)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < \infty.$$

Entonces, si se cumple (11) o (12) se tiene que la función u definida por (9) pertenece a $C^2([0,\pi]\times[0,\infty))$ y que sus derivadas parciales se obtienen derivando término a término. En particular, esto último implica que u satisface (1). Además, como en cualquier caso la serie de Fourier de senos de f converge uniformemente a f, se tiene que u satisface (2). Finalmente, notamos que es inmediato que u satisface (3).

2. Considerar el problema:

$$u_t(x,t) + \Delta^2 u(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \qquad\qquad u(x,0) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde f es una función en la clase de Schwartz $\mathcal{S}$ y $\Delta^2 u := \Delta(\Delta u)$ para $u \in C^4(\mathbb{R}^n)$. Demostrar que existe $\varphi \in \mathcal{S}$ tal que

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n/4}\varphi(t^{-1/4}(x-y))f(y)\,dy \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

es solución del problema dado.

Sugerencia: No buscar φ de manera explícita si no caracterizarla por su transformada de Fourier.

Resolución. Sea u una solución de:

$$u_t(x,t) + \Delta^2 u(x,t) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \qquad\qquad u(x,0) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

La transformada de Fourier en x de u verifica:

$$\partial_t \hat{u}(\xi,t) + (4\pi^2|\xi|^2)^2\hat{u}(\xi,t) = 0, \qquad \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi).$$

Resolviendo esta ecuación diferencial ordinaria obtenemos:

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-16\pi^4|\xi|^4 t}. \tag{13}$$

Notar que para todo $t > 0$, la función $\xi \to \hat{f}(\xi)e^{-16\pi^4|\xi|^4 t}$ pertenece a $\mathcal{S}$ porque $\hat{f} \in \mathcal{S}$ puesto que $f \in \mathcal{S}$. Luego, existe $u(\cdot,t) \in \mathcal{S}$ tal que $\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-16\pi^4|\xi|^4 t}$. Usando el teorema de inversión, se tiene:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{-16\pi^4|\xi|^4 t}e^{2i\pi\xi\cdot x}\,d\xi.$$

Usando ahora el teorema de la convergencia dominada vemos a partir de esta fórmula que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ y que las derivadas de u se obtienen derivando bajo el signo integral. En efecto, para todo α, k tenemos:

$$\begin{aligned} D_x^\alpha \partial_t^k\Big(\hat{f}(\xi)e^{-16\pi^4|\xi|^4 t}e^{2i\pi\xi x}\Big) &= (-16\pi^4|\xi|^4)^k(2i\pi\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)e^{-16\pi^4|\xi|^4 t}e^{2i\pi\xi\cdot x} \\ &= g(\xi)e^{-16\pi^4|\xi|^4 t}e^{2i\pi\xi\cdot x}, \end{aligned}$$

donde $g(\xi) := (-16\pi^4|\xi|^4)^k(2i\pi\xi)^\alpha\hat{f}(\xi)$ es una funcion de $\mathcal{S}$. Luego,

$$\Big|D_x^\alpha\partial_t^k\Big(\hat{f}(\xi)e^{-16\pi^4|\xi|^4 t}e^{2i\pi\xi\cdot x}\Big)\Big| \le |g(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

y podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada.

Podemos verificar ahora que u es, efectivamente, solución del problema. Primero, vemos que:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\partial_t\Big(e^{-16\pi^4|\xi|^4 t}\Big)e^{2i\pi\xi\cdot x}\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{-16\pi^4|\xi|^4 t}(-16\pi^4|\xi|^4)e^{2i\pi\xi x}\,d\xi \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{-16\pi^4|\xi|^4 t}\Delta_x^2(e^{2i\pi\xi\cdot x})\,d\xi \\ &= -\Delta^2 u(x,t), \end{aligned}$$

Además, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \lim_{t\to 0}(e^{-16\pi^4|\xi|^4 t})e^{2i\pi\xi\cdot x}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi\xi x}\, d\xi = f(x)$$

donde usamos el teorema de inversión en la última igualdad (vale porque $f \in \mathcal{S}$).

Para terminar, veamos que u se puede reescribir de la forma:

$$u(x,t) = (\Phi_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t(x-y)f(y)dy,$$

donde Φ_t es de la forma $\Phi_t(x) = t^{-n/4}\phi(x/t^{1/4})$ con $\phi \in \mathcal{S}$.

Para que esto valga, se debe tener $\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\hat{\Phi}_t(\xi)$. Comparando con (13) debemos buscar Φ tal que $\hat{\Phi}_t(\xi) = e^{-16\pi^4|\xi|^4 t}$, es decir:

$$\hat{\phi}(t^{\frac{1}{4}}\xi) = e^{-16\pi^4(t^{\frac{1}{4}}|\xi|)^4} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

o bien,

$$\hat{\phi}(\xi) = e^{-16\pi^4|\xi|^4}.$$

Como $e^{-16\pi^4|\xi|^4}$ pertenece a $\mathcal{S}$, existe una única $\phi \in \mathcal{S}$ tal que $\hat{\phi}(\xi) = e^{-16\pi^4|\xi|^4}$.

3. Sea $B := B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, y sea $u \in C^2(B\backslash\{0\}) \cap C(\bar{B}\backslash\{0\})$ una función armónica en $B\backslash\{0\}$ tal que $|x|^{n-2}u(x) \to 0$ cuando $|x| \to 0$. Probar que existe una única función armónica en B que es continua en $\bar{B}$ y coincide con u en $\bar{B}\backslash\{0\}$ (o sea, una única extensión armónica de u a B).

Sugerencia: Considerar

$$\widetilde{u}(x) := \int_{\partial B} u(y)P(x,y)\,dy$$

donde P es el núcleo de Poisson de B. Luego, considerar las funciones

$$v_\varepsilon^{\pm}(x) := u(x) - \widetilde{u}(x) \pm \varepsilon(|x|^{2-n} - 1), \quad \varepsilon > 0,$$

para comparar u y $\widetilde{u}$ en los anillos $\{\delta < |x| \leq 1\}$, $\delta > 0$.

Resolución. Notar que $v_\varepsilon^{\pm}$ es armónica en cualquier anillo $\{\delta < |x| < 1\}$, $\delta > 0$, y continua hasta el borde del anillo. Podemos entonces aplicar el principio del máximo/mínimo:

$$\operatorname*{máx}_{\{\delta \leq |x| \leq 1\}} v_\varepsilon^- = \operatorname{máx}\{\operatorname*{máx}_{\{|x|=1\}} v_\varepsilon^-, \operatorname*{máx}_{\{|x|=\delta\}} v_\varepsilon^-\}, \qquad \operatorname*{mín}_{\{\delta \leq |x| \leq 1\}} v_\varepsilon^+ = \operatorname{mín}\{\operatorname*{mín}_{\{|x|=1\}} v_\varepsilon^+, \operatorname*{mín}_{\{|x|=\delta\}} v_\varepsilon^+\}.$$

Como $\tilde{u} = u$ en ∂B, tenemos $v_\varepsilon^{\pm} = 0$ en ∂B por lo que

$$\operatorname*{máx}_{\{\delta \leq |x| \leq 1\}} v_\varepsilon^- = \operatorname{máx}\{0, \operatorname*{máx}_{\{|x|=\delta\}} v_\varepsilon^-\}, \qquad \operatorname*{mín}_{\{\delta \leq |x| \leq 1\}} v_\varepsilon^+ = \operatorname{mín}\{0, \operatorname*{mín}_{\{|x|=\delta\}} v_\varepsilon^+\}.$$

Además, como $\tilde{u} \in C(\bar{B})$, existe $M > 0$ tal que $|\tilde{u}| \leq M$ en $\bar{B}$. Luego,

$$v_\varepsilon^+(x) \geq -M - \varepsilon + |x|^{2-n}\Big(|x|^{n-2}u(x) + \varepsilon\Big) \overset{|x|\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

En particular $v_\varepsilon^+(x) \geq 0$ si $|x| = \delta$ es suficientemente chico. Luego, para estos valores de δ, se tiene:

$$\operatorname*{mín}_{\{\delta \leq |x| \leq 1\}} v_\varepsilon^+ \geq 0$$

es decir,

$$u(x) + \varepsilon(|x|^{2-n} - 1) \geq \widetilde{u}(x) \qquad \delta \leq |x| \leq 1.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ deducimos que $u(x) \geq \widetilde{u}(x)$ para $\delta \leq |x| \leq 1$ y δ suficientemente pequeño, así que:

$$u(x) \geq \widetilde{u}(x) \qquad 0 < |x| \leq 1.$$

De la misma manera obtenemos:

$$v_\varepsilon^-(x) \leq M + \varepsilon + |x|^{2-n}\Big(|x|^{n-2}u(x) - \varepsilon\Big) \overset{|x|\to 0}{\longrightarrow} -\infty.$$

En particular $v_\varepsilon^-(x) \leq 0$ si $|x| = \delta$ es suficientemente chico. Luego, para estos valores de δ, se tiene:

$$\operatorname*{máx}_{\{\delta \leq |x| \leq 1\}} v_\varepsilon^+ \leq 0,$$

es decir,

$$u(x) - \varepsilon(|x|^{2-n} - 1) \leq \widetilde{u}(x) \qquad \delta \leq |x| \leq 1.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ deducimos:

$$u(x) \leq \widetilde{u}(x) \qquad 0 < |x| \leq 1.$$

Obtenemos entonces

$$u(x) = \widetilde{u}(x) \qquad 0 < |x| \leq 1.$$

La unicidad sigue de la unicidad de solución del problema $\Delta\tilde{u} = 0$ en B, $\tilde{u} = u$ en ∂B en $C^2(B) \cap C(\bar{B})$.

4. Considerar el problema:

$$\begin{aligned} \beta(x,t)u_t(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)u_{x_ix_i}(x,t) + u(x,t) &= 0 && x \in U,\ 0 < t \leq T, \\ u(x,t) &= h(x,t) && x \in \partial U,\ 0 < t \leq T, \\ u(x,0) &= g(x) && x \in U, \end{aligned}$$

donde $T > 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y acotado, $\alpha_i \in C((0,T])$ para $i = 1, \ldots, n$, $\beta \in C(U \times (0,T])$, $h \in C(\partial U \times (0,T])$ y $g \in C(U)$. Probar que si $\alpha_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y $\beta > \beta_0 > 0$ para algún β_0, entonces el problema dado tiene a lo sumo una solución en $C^2(U \times (0,T]) \cap C(\bar{U} \times [0,T])$.

Resolución. Debemos probar que la función nula es la única solución clásica de:

$$\begin{aligned} \beta(x,t)u_t(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)u_{x_ix_i}(x,t) + u(x,t) &= 0 && x \in U,\ 0 < t \leq T, \\ u(x,t) &= 0 && x \in \partial U,\ 0 < t \leq T, \\ u(x,0) &= 0 && x \in U, \end{aligned}$$

Veamos que $\text{máx}_{\bar{U}_T} u \leq 0$. Si este máximo se alcanza en el borde parabólico, donde $u = 0$, lo que buscamos probar es inmediato. Supongamos entonces que $\text{máx}_{\bar{U}_T} u$ se alcanza en un punto $(x_0, t_0) \in U_T := U \times (0,T]$. Entonces $u_t(x_0,t_0) \geq 0$, así que $\beta(x_0,t_0)u_t(x_0,t_0) \geq 0$ porque $\beta \geq 0$. Además, la matriz $D^2u(x_0,t_0)$ es simétrica y semidefinida negativa por lo que $u_{x_ix_i}(x_0,t_0) = (D^2u(x_0,t_0)e_i, e_i) \leq 0$ para todo i (donde $e_1, .., e_n$ son los vectores de la base canónica). Como $\alpha_1, .., \alpha_n \geq 0$ obtenemos $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t_0)u_{x_ix_i}(x_0,t_0) \leq 0$. Entonces,

$$u(x_0,t_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)u_{x_ix_i}(x,t) - \beta(x,t)u_t(x,t) \leq 0.$$

Por lo tanto, $\text{máx}_{\bar{U}_T} u \leq 0$.

Podemos probar de la misma manera que $\text{mín}_{\bar{U}_T} u \geq 0$. Luego $u \equiv 0$.