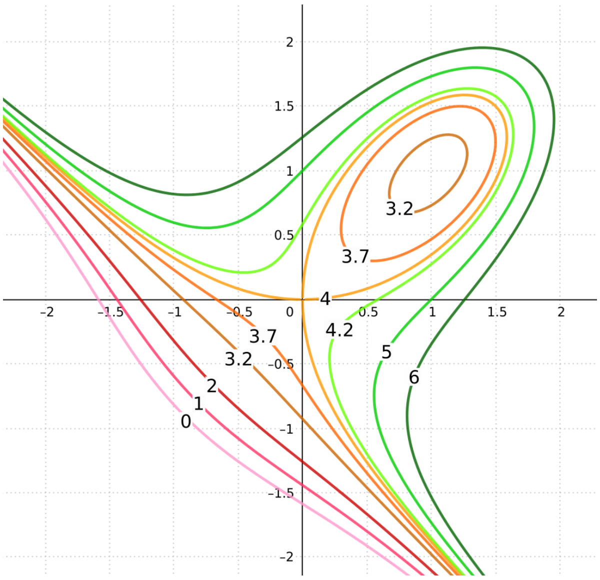
Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)

Primer cuatrimestre 2020

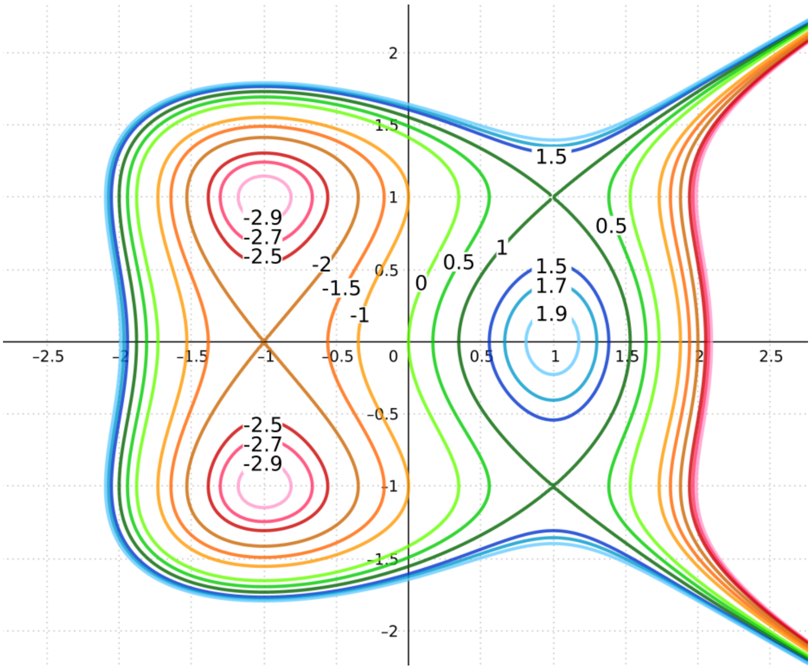
Práctica 6: Extremos relativos y absolutos - Multiplicadores de Lagrange

1. Para cada una de las siguientes funciones, utiliza los gráficos de las curvas de nivel para pronosticar la ubicación de los puntos críticos y si tiene máximos o mínimos locales o puntos silla. Luego, con el criterio de la segunda deriva confirma tu pronóstico.

   a) $f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



   b) $f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



2. Calcular máximos y mínimos locales y puntos sillas de las siguientes funciones. Graficarlas y comparar el gráfico con los resultados obtenidos.

   a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$,

   b) $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$,

   c) $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$,

   d) $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$,

   e) $f(x, y) = y\cos(x)$,

   f) $f(x, y) = e^y(y^2 - x^2)$.

3. Demostrar que $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ tiene infinitos puntos críticos y que en ninguno de ellos se puede aplicar el criterio de la segunda derivada. A continuación, demostrar que f tiene un mínimo absoluto en cada punto crítico.

4. Para cada una de las siguientes funciones, mediante el gráfico de la función y/o los gráficos de las curvas de nivel, estimar los valores máximos y mínimos y los puntos sillas. Luego, mediante el cálculo encontrar los valores exactos.

   a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$,

   b) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$.

5. Para cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, determinar los valores máximos y mínimos sobre el conjunto D.

   a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ con D la región triangular cerrada con vértices $(2, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, -2)$,

   b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$,

   c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 5\}$,

   d) $f(x, y) = xy^2$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 3\}$.

6. Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **continua** y tiene dos máximos locales, entonces, necesariamente tiene un mínimo local. Para funciones de dos o más variables esta afirmación no es cierta.

   Demostrar que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

   tiene sólo dos puntos críticos y ambos son máximos locales. Graficar la función para entender como es posible esto.

7. Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **continua** y tiene un sólo punto crítico, entonces, si ese punto crítico es un máximo (mínimo) local, necesariamente es un máximo (mínimo) absoluto. Para funciones de dos o más variables esta afirmación no es cierta.

   Demostrar que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x, y) = x^2 + y^2(1 + x)^3$$

   tiene un sólo punto crítico, que resulta ser un mínimo local pero no absoluto. Graficar la función para entender como es posible esto.

8. Calcular el volumen de la caja rectangular más grande ubicada en el primer octante con tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x+2y+3z = 6$.

9. Hallar los puntos sobre la superficie $y^2 = 9 + xz$ que están más cerca del origen.

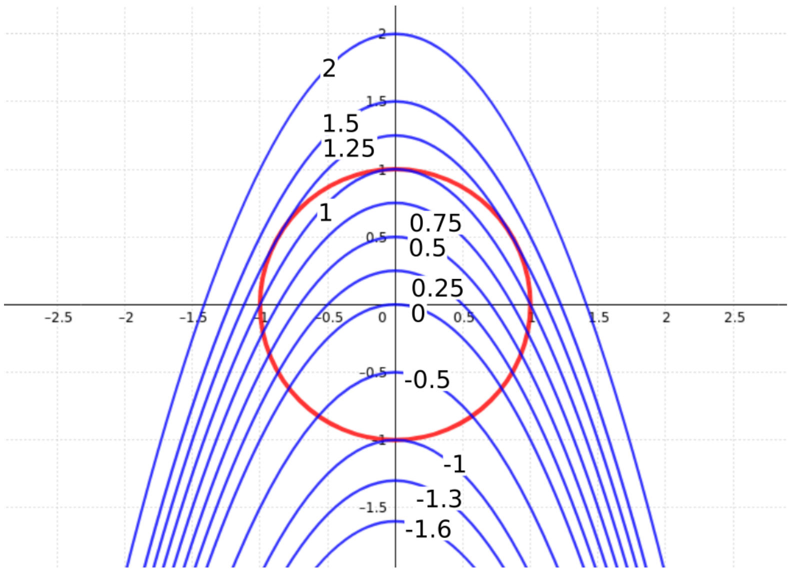
10. Tres alelos, A, B y O determinan los cuatro tipos de sangre: A (AA o AO), B (BB o BO), O (OO) y AB. La ley de Hardy-Weinberg establece que la proporción P de individuos de una población que llevan dos alelos diferente en su tipo de sangre está dada por la fórmula

    $$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

    donde p, q y r son las proporciones en la población de A, B y O respectivamente. Usando el hecho de que $p + q + r = 1$, demostrar que P es como mucho $\frac{2}{3}$.

Multiplicadores de Lagrange

11. En el siguiente esquema se muestran los gráficos de las curvas de nivel de un función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (en azul) y de la curva $x^2+y^2 = 1$ (en rojo). Estimar los valores máximos y mínimos de f sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$. Explicar el razonamiento hecho.



12. Utilizando multiplicadores de Lagrange, hallar los valores máximos y mínimos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones dadas.

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $xy = 1$,
   b) $f(x,y) = 3x + 1$, $x^2 + y^2 = 10$,
   c) $f(x,y) = e^{xy}$, $x^3 + y^3 = 16$,
   d) $f(x,y,z) = 2x + 2y + z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,
   e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x + y + z = 12$.

13. Para cada una de las siguientes funciones, hallar los valores máximos y mínimos en la región indicada.

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y$, $x^2 + y^2 \leq 9$,
   b) $f(x,y) = e^{-xy}$, $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

14. Sea $f(x,y) = 2x+3y$. Consideremos el problema de maximar f sujeta a la restricción $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.

   a) Intentar resolver el problema usando multiplicadores de Lagrange.
   b) ¿$f(25,0)$ da un valor mayor al del item anterior?
   c) Resolver el problema graficando la ecuación de la restricción y varias curvas de nivel de f.
   d) Explicar por qué el método de multiplicadores de Lagrange no funciono.
   e) ¿Cuál es la importancia de $f(9,4)$?

15. Utilizar multiplicadores de Lagrange para resolver los ejercicios 8 y 9.

16. La intersección del plano $x+y+2z = 2$ con el paraboloide $z = x^2+y^2$ es una elipse. Encontrar los puntos de dicha elipse que son los más cercanos y los más lejanos al origen.