Análisis I - Matemática I - Análisis II (C) - Análisis Matemático I (Q)
Primer cuatrimestre 2020

Práctica 5: Polinomio de Taylor

1. i) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para la función $f(x) = \ln(x+1)^2$.
   ii) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para la función $g(x) = e^{x+2}$.
   iii) Desarrollar la función $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ en potencias de $x - 2$;
   iv) Desarrollar la función $g(x) = \sqrt{x}$ en potencias de $x - 1$ hasta orden 3.

2. i) Hallar p el polinomio de Maclaurin de orden 2 y la expresión del resto para la función $f(x) = \sqrt{1+x}$.
   ii) Estimar el error que se comete al aproximar $f(0,2)$ por $p(0,2)$.

3. Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del resto.
   a) $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$,
   b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$,
   c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0, 0)$,
   d) $f(x, y) = x + xy + 2y$ en $(1, 1)$,
   e) $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$ en $(1, 0)$,
   f) $f(x, y) = e^x \mathrm{sen}(xy)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$,
   g) $f(x, y) = \ln(1 + xy)$ en $(2, 3)$,
   h) $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ en $(2, 3, 4)$.

4. Utilizando el polinomio de Taylor de $f(x, y) = x^y$, aproximar $(0.95)^{2.01}$
   a) con error menor que $1/200$.
   b) con error menor que $1/5000$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xe^y$.
   i) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f centrado en $(1, 0)$.
   ii) Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0.98, 0.02)$. Estimar el error cometido.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$.
   i) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f centrado en $(1, 1)$.
   ii) Usar el item anterior para aproximar $e^{\frac{4}{10}}$ usando que $\frac{4}{10} = (1 + \frac{1}{10})^2 - (1 - \frac{1}{10})^2$. Comprobar que el error que cometió es menor que 0.3.

7. Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función

$$f(x, y) = \text{sen}(x)\text{sen}(y).$$

8. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x+1, 2y - e^x)$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, tales que el polinomio de Taylor de grado 2 de $g \circ f$ en $(0, 0)$ es

$$p(x, y) = 4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy.$$

Calcular $\nabla g(1, -1)$.

9. Sea $f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y)$.

   i) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado en $(0, 0)$.

   ii) Calcular
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) + x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}.$$

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^3 tal que su polinomio de Taylor de orden 3 en $(1, 1)$ es $p(x, y) = 1 - 3x + x^2 + xy + y^2 - y^3$. Analizar la existencia de los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y) - (1, 1)\|}, \qquad b)\ \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y) - (1, 1)\|^2}.$$