Práctica 4: Diferenciación - Aplicaciones

Derivada de una curva - Recta tangente

1. Para cada una de las curvas dadas a continuación

   a) $r(t) = (t-2, t^2+1)$, $-2 \leq t \leq 2$, $t = 1$,

   b) $r(t) = (\text{sen}(t), 2\cos(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $t = \dfrac{\pi}{4}$.

   resolver los siguientes items:

   i) Graficar.

   ii) Calcular la derivada $r'(t)$.

   iii) Para el valor de t dado, graficar el vector posición $r(t)$ y el vector tangente $r'(t)$.

2. Para cada una de las siguientes curvas, hallar la ecuación paramétrica de la recta tangente en el punto dado. Graficar la curva y la recta tangente hallada.

   a) $x = 1 + 2\sqrt{t}$, $y = -t$, $0 \leq t \leq 9$, $(3, -1)$,

   b) $x = e^t$, $y = te^t$, $-2 \leq t \leq 3$, $(1, 0)$.

3. Para cada una de las siguientes curvas, encontrar el vector tangente unitario en el punto determinado por el valor de t indicado.

   a) $r(t) = (te^{-t}, \tan(t), t^2 + t)$, $t = 0$,

   b) $r(t) = (t^3 + 3t, t^2 + 1, 3t + 4)$, $t = 1$.

Derivadas parciales

4. Para cada una de las siguientes funciones, hallar las derivadas parciales f_x y f_y. Graficar f y, para el punto p indicado, ubicar $(p, f(p))$ y graficar $\nabla f(p)$.

   a) $f(x, y) = x^2y^3$, $p = (2, 1)$, *b)* $f(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}$, $p = (1, 1)$.

5. Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones.

   a) $f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$, *b)* $f(x, y) = \text{sen}(x)$,

   c) $f(x, y) = x^2\text{sen}^2(y)$, *d)* $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$,

   e) $f(x, y, z) = ye^x + z$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = |x| + |y|$.
   i) Graficarla en GeoGebra y, a partir de la observación del gráfico, conjeturar sobre la existencia o no de $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.
   ii) Justificar análiticamente las conjeturas hechas en el item anterior.

7. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones.

   a) $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$, *b)* $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(x + y)$,

   c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, *d)* $f(x, y) = \dfrac{xy}{x - y}$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

   i) Graficarla en GeoGebra.
   ii) Hallar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.
   iii) Hallar $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.
   iv) Demostrar que $f_{xy}(0, 0) = -1$ y $f_{yx}(0, 0) = 1$. ¿Contradice esto al Teorema de Clairaut-Schwarz? ¿Por qué? (Sugerencia: graficar en GeoGebra f_{xy} y f_{yx}).

Plano tangente

9. Para cada una de las siguientes superficies, estudiar la existencia del plano tangente en el punto dado. En caso de que exista, dar la ecuación.

   a) $z = 3y^2 - 2x^2 + x$, $(2, -1, -3)$,
   b) $z = \sqrt{xy}$, $(1, 1, 1)$,
   c) $z = xe^{xy}$, $(2, 0, 2)$.

10. Graficar en GeoGebra la superficie $z = x^2 + xy + 3y^2$ y su plano tangente en $(1, 1, 5)$.

11. Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones en el punto dado.

   a) $f(x, y) = 1 + x \ln(xy - 5)$ en $(2, 3)$,

   b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ en $(0, 0)$

12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(2,5) = 6$, $f_x(2,5) = 1$ y $f_y(2,5) = -1$. Estimar el valor de $f(2.2, 4.9)$.

13. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen. En caso de que exista, dar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el origen.

    a) $f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$,

    b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$

    c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Regla de la cadena

14. Utilizar la regla de la cadena para calcular la derivada de la composición $f \circ r$ en cada uno de los siguientes casos.

    a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, $r(t) = (\operatorname{sen}(t), e^t)$,

    b) $f(x,y) = \cos(x + 4y)$, $r(t) = (5t^4, 1/t)$,

    c) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $r(t) = (\ln(t), \cos(t))$.

15. Si $z = f(x,y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$ y se sabe que

$$\begin{aligned} g(3) = 2, &\quad h(3) = 7, \\ g'(3) = 5, &\quad h'(3) = -4, \\ f_x(2,7) = 6, &\quad f_y(2,7) = -8. \end{aligned}$$

    Determinar dz/dt cuando $t = 3$.

16. Utilizar la regla de la cadena para calcular $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$ en cada uno de los siguientes casos.

    a) $z = x^2 y^3$, $x = s\cos(t)$, $y = s\operatorname{sen}(t)$,

    b) $z = \operatorname{sen}(x)\cos(y)$, $x = st^2$, $y = s^2 t$,

    c) $z = e^{x+2y}$, $x = s/t$, $y = t/s$.

17. Utilizando un diagrama de árbol, escribir la regla de la cadena para las derivadas parciales indicadas. Suponer que todas las funciones son diferenciables.

a) $z = f(x, y)$, $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}$,

b) $w = f(x, y, z)$, $x = x(r, s)$, $y = y(r, s)$, $z = z(r, s)$, $\dfrac{\partial w}{\partial r}$, $\dfrac{\partial w}{\partial s}$.

18. Utilizar la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales indicadas en el punto dado en cada uno de los siguientes casos.

    a) $z = x^4 + x^2 y$, $x = s + 2t - u$, $y = stu^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ en $(s, t, u) = (4, 2, 1)$,

    b) $w = xy + yz + zx$, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\mathrm{sen}(\theta)$, $z = r\theta$, $\dfrac{\partial w}{\partial r}$, $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ en $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{2}\right)$.

19. Sea $T(x, y)$ la temperatura (en grado celsius) en un punto (x, y). Un insecto se arrastra de tal modo que su posición después de t segundos está dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x e y se miden en centímetros. La función temperatura satisface $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$. ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura del insecto en su trayectoria después de 3 segundos?

20. Sea $z = f(x - y)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Demostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

21. Sean $z = f(x, y)$ con f una función C^2, $x = r^2 + s^2$ e $y = 2rs$. Determinar $\partial^2 z/\partial r \partial s$ en función de las derivadas parciales de f.

Derivadas direccionales

22. Calcular la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección del vector v.

    a) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $(1, 2)$, $v = (3, 5)$,

    b) $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $v = (5, 1, -2)$.

23. Calcular la deriva direccional de f en el punto dado en la dirección que indica el ángulo θ.

    a) $f(x, y) = x^3 y^4 + x^4 y^3$, $(1, 1)$, $\theta = \pi/6$,

    b) $f(x, y) = ye^{-x}$, $(0, 4)$, $\theta = 2\pi/3$.

24. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$. Determinar la máxima razón de cambio de f en el punto $(4, 1)$ y la dirección en la cual se presenta.

25. Encontrar las direcciones en las cuales la derivada direccional de $f(x, y) = ye^{-xy}$ en el punto $(0, 2)$ vale 1.

26. Sea $f(x, y) = x^{1/3} y^{1/3}$.

i) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

ii) Mostrar que f es continua en $(0,0)$. ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

27. Consideremos la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Probar que f admite derivadas direccionales en el origen para todo vector unitario $v \in \mathbb{R}^2$. Sin embargo, f tampoco es continua en el origen.

28. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Probar que en el origen f es continua, admite todas las derivadas direccionales, pero f no es diferenciable.

29. Supongamos que escalas una montaña cuya forma está dada por la ecuación $z = 1000 - 0,005x^2 - 0,01y^2$ donde x, y y z se dan en metros y estás en el punto $(60, 40, 966)$. El eje de las x positivas va hacia el este y el eje de las y positivas va hacia el norte.

i) Si caminas hacia el sur, ¿empezarás a ascender o descender? ¿Cuál es la razón de cambio en esa dirección?

ii) ¿En qué dirección está la máxima pendiente? ¿Cuál es la razón de cambio en esa dirección?

Teorema de la función implícita

30. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - y^3$. Mostrar que sobre la curva de nivel $f(x,y) = 0$ podemos despejar y en función de x (i.e. $y = \phi(x)$) ¿Es ϕ de clase C^1 en un entorno del cero? ¿Puede aplicarse el teorema de la función implícita en el punto $(0,0)$?

31. Para cada una de los conjuntos de nivel S y los puntos a dados a continuación

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 1\}$ con $f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2$ y $a = (2,0)$,

b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g(x,y) = 3\}$ con $g(x,y) = x^5 + y^2 + xy$ y $a = (1,1)$, *c)* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / h(x,y,z) = 0\}$ con $h(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8$ y $a = (0,0,2)$,

resolver los siguientes items:

i) Mostrar que $a \in S$.

ii) Calcular las derivadas parciales de la función en el punto a.

iii) Determinar si en un entorno del punto a, el conjunto de nivel resulta ser el gráfico de una función ϕ.

iv) Calcular la derivada o las derivadas parciales, según corresponda, de cada una de las funciones ϕ que quedan definidas en el ítem anterior.

32. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + z^2.$$

i) Demostrar que $f(x,y,z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y,z)$ en un entorno del punto $(1,1,1)$.

ii) Encontrar $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1)$ y $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1)$.

Planos y rectas tangentes a superficies de $\mathbb{R}^3$ dadas de manera implícita

33. Para cada una de las siguientes superficies de $\mathbb{R}^3$ determinar las ecuaciones de

i) el plano tangente y

ii) la recta normal

a la superficie en el punto indicado.

a) $2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10$, $(3,3,5)$,

b) $y = x^2 - z^2$, $(4,7,3)$,

c) $xy + yz + zx = 5$, $(1,2,1)$.

34. Demostrar que el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ son tangentes en el punto $(1,1,2)$ (es decir, que tienen el mismo plano tangente en ese punto).

35. Demostrar que toda recta normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ pasa por el centro de la esfera.