

17. Se desea determinar una magnitud μ . Para ello se realizan n mediciones independientes de la misma magnitud en idénticas condiciones, que denotaremos con X_1, \dots, X_n . Asumimos el siguiente modelo para las variables aleatorias X_i

$$X_i = \mu + \varepsilon_i$$

donde μ es la verdadera magnitud desconocida, y ε_i es la variable aleatoria que denota el error de la i -ésima medición. Asumimos que $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución normal con media cero y desviación estándar es 0.2.

- Obtenga la distribución de las variables X_i , su esperanza y su varianza.
 - Obtenga la distribución **exacta** de \bar{X}_n , su esperanza y su varianza.
 - Calcule la probabilidad de que el promedio de $n = 8$ mediciones diste de la verdadera magnitud μ en menos de 0.1 unidades.
 - Obtenga una expresión para la probabilidad de que la medición diste de la verdadera magnitud μ en menos de 0.1 unidades en función de n . Estudie su monotonía y el límite cuando n tiende a infinito de esta probabilidad.
 - Determine cuántas mediciones son necesarias para que $P(|\bar{X}_n - \mu| < 0.1) \geq 0.99$.
18. Consideremos el modelo del ejercicio anterior con la diferencia de que ahora sólo asumiremos que $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y desviación estándar es 0.2. La distribución de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ es desconocida.

- ¿Es posible conocer la distribución **exacta** de \bar{X}_n ? ¿Es posible conocer su esperanza y su varianza?
- Para $n = 10$ y $n = 100$ mediciones, usando la desigualdad de Chebyshev, encuentre una cota inferior para

$$P(|\bar{X}_n - \mu| < 0.1).$$

- Determine cuan grande debe ser n para que $P(|\bar{X}_n - \mu| < 0.1) \geq 0.999$, usando nuevamente la desigualdad de Chebyshev.
- Calcule la probabilidad aproximada de que el promedio de $n = 30$ mediciones diste de la verdadera magnitud μ en menos de 0.1 unidades. ¿Es posible calcular esta probabilidad en forma exacta?
- Determine cuántas mediciones son necesarias para que $P(|\bar{X}_n - \mu| < 0.1) \geq 0.999$. Compare el resultado obtenido con el valor hallado en el ítem c).