Optimización

Primer Cuatrimestre 2019

Práctica N° 1: Minimización sin restricciones.

Minimización sin restricciones:

Ejercicio 1 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = (y - x^2)^2 + x^5$. Hallar los puntos críticos de f. ¿Cuáles de ellos son minimizadores o maximizadores, locales o globlaes?

Ejercicio 2 Encontrar, si existen, los máximos y mínimos locales de la función definida por $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. ¿Existen extremos globales?

Ejercicio 3 Encontrar, si es posible, a y b de manera que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tenga un máximo local en $x = 0$ y un mínimo local en $x = 1$.

Ejercicio 4 Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to R$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2(1 - x)^3.$$

Analizar los puntos críticos de f, y decidir si tiene extremos locales y/o globales.

Ejercicio 5 Considerar la función f definida por $f(x, y, z) = 2x^2+xy+y^2+yz+z^2-6x-7y-8z+9$.

a. Usando las condiciones de primer orden, encontrar un extremo de f.

b. Verificar que es un mínimo relativo usando las condiciones de segundo orden.

c. Probar que el mínimo es un mínimo global.

Resultados generales y contraejemplos:

Ejercicio 6 Mostrar ejemplos de las siguientes situaciones.

a. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que todos los puntos de $[0, 1]$ sean extremos locales de f.

b. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que f tenga varios minimizadores locales y globales.

c. $\Omega \subset \mathbb{R}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua tal que f no tenga extremos absolutos en Ω.

d. $\Omega \subset \mathbb{R}$ compacto y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que f no tenga extremos absolutos en Ω.

e. $\Omega \subset \mathbb{R}$ compacto y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ acotada tal que f no tenga extremos absolutos en Ω.

Ejercicio 7 Mostrar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, entonces f tiene un minimizador global en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 8 Mostrar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ de modo que el conjunto de nivel $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \leq f(x_0)\}$ es acotado, entonces f tiene un minimizador global en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 9 Considerar la función f definida por $f(x,y) = (x-y^2)(x-\frac{1}{2}y^2)$. Verificar que, para $x^* = (0,0)$, $\lambda = 0$ es un minimizador local de $\phi(\lambda) = f(x^* + \lambda d)$ para todo $d \in \mathbb{R}^2$, pero x^* no es un minimizador local de f.

Ejercicio 10 Encontrar ejemplos de las siguientes situaciones.

a. x^* es minimizador local de f en Ω, pero $\nabla f(x^*) \neq 0$.

b. x^* es minimizador local de f en Ω, $\nabla f(x^*) = 0$, pero $\nabla^2 f(x^*)$ no es semidefinida positiva.

c. Ω es abierto, $\nabla f(x^*) = 0$ pero x^* no es minimizador local.

d. Ω es abierto, $\nabla f(x^*) = 0$, $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$, pero x^* no es minimizador local.

e. Ω es abierto, x^* minimizador local estricto, pero $\nabla^2 f(x^*)$ no sea definida positiva.

Ejercicio 11 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Probar que minimizar $f(x)$ es equivalente a minimizar $g(f(x))$.

Ejercicio 12 Considerar la función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - b^T x + c$, donde $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Sea x^* un minimizador local de f. Probar que x^* es minimizador global de f.

Convexidad:

Ejercicio 13 Mostrar que las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = e^x$ son convexas.

Ejercicio 14 Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es estrictamente convexa y tiene mínimo, entonces el mínimo es único. Dar un ejemplo de función estrictamente convexa sin mínimo.

Ejercicio 15 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ estrictamente convexa con un único mínimo x^*. Probar que $f(x) \to \infty$ cuando $\|x\| \to \infty$.

Ejercicio 16 Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un conjunto de funciones convexas definidas sobre un conjunto convexo Ω. Mostrar que la función $f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$ es convexa en la región en la cual es finita.

Ejercicio 17 Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función convexa definida en un conjunto convexo Ω de $\mathbb{R}^n$ y sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa y no decreciente. Probar que la composición $\phi \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función convexa.

Ejercicio 18 Sean $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, p$ funciones convexas y $h_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, j = 1, \ldots, m$ funciones lineales. Demostrar que el conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0 \ \forall 1 \leq i \leq p, h_j(x) = 0 \ \forall 1 \leq j \leq m\}$ es un conjunto convexo.

Ejercicio 19 Sea $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Mostrar que una condición necesaria y suficiente para que un punto x^* en el interior de Ω sea un mínimo relativo de f es que $\nabla f(x^*) = 0$ y que f sea localmente convexa en x^*.

Ejercicio 20 Sea $v \in \mathbb{C}^n$. Probar que la matriz $I - vv^*$ es unitaria si y sólo si $\|v\|_2^2 = 2$ o $v = 0$.

Ejercicio 21 Dados $x \neq x'$ en $\mathbb{C}^n$ tal que $\|x\|_2 = \|x'\|_2$ y $\langle x, x'\rangle$ es real. Probar que la matriz unitaria $U = I - vv^*$ con $v = \dfrac{\sqrt{2}}{\|x - x'\|_2}(x - x')$ satisface que $Ux = x'$.

Algoritmos e implementación

Ejercicio 22 Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una función cuadrática, $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x + c$. Escribir un algoritmo que verifique si f tiene un mínimo y, en tal caso lo encuentre resolviendo un sistema de ecuaciones apropiado.

Ejercicio 23 Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1 y $a \in \mathbb{R}$, implementar una función que devuelva z tal que $z \sim f'(a)$, donde la aproximación se realiza usando el método de diferencias finitas, tomando como datos a a, f y el tipo (*backward*, *forward* y *centradas*).

Ejercicio 24 Implementar una función que, dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, un punto $a \in \mathbb{R}^n$ y un índice i, $1 \leq i \leq n$, aproxime $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Ejercicio 25 Utilizando la función del ejercicio anterior, implementar una función que calcule $\nabla f(a)$ y otra que calcule $Hf(a)$, para f y a dados.

Ejercicio 26 Escribir un programa que dada una f y un punto inicial x_0 busque un mínimo x^* de f usando el algoritmo de Newton generalizado. Probarlo para

a. el caso del Ejercicio 9 de esta guía y

b. la función $f(x, y, z) = -1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 - 4y + y^2 + 4z + 6z^2 + 4z^3 + z^4$.