Práctica 3: Diferenciación

Aplicación de algunos resultados de diferenciación en una variable

1. Verificar que se cumple el teorema de Rolle para las siguientes funciones en los intervalos indicados:

   (a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el intervalo $[1, 2]$.

   (b) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ en el intervalo $[1, 3]$.

   (c) $f(x) = \sin^2 x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

2. Probar que la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ satisface $f(1) = f(5)$ pero no existe $c \in (1, 5)$ tal que $f'(c) = 0$ ¿Por qué no se puede aplicar el teorema de Rolle?

3. (a) Sea f un polinomio con al menos k raíces distintas, probar que f' tiene al menos $k - 1$ raíces distintas.

   (b) Probar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene sólo una raíz real.

   (c) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{a^2 x} + x^3 + x$ si $x \in \mathbb{R}$. Probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $[-1, 0]$.

4. Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Demostrar las siguientes afirmaciones:

   (a) Si $f' = g'$ en (a, b), entonces $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.

   (b) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente.

   (c) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente.

5. Como una consecuencia del Teorema de Lagrange, mostrar que son válidas las siguientes acotaciones

   (a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

   (b) $|1/x - 1/y| \leq |x - y|$, para $x, y > 1$.

   (c) $|\arctan a - \arctan b| \leq \dfrac{1}{2}\,|a - b|$, para $a, b \geq 1$.

6. Encontrar explícitamente el punto intermedio cuya existencia está garantizada por el teorema de Cauchy en el caso de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el segmento $[1, 2]$.

Derivadas parciales y direccionales

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $x = a$. Probar que f es derivable en $x = a$ si y solo si existe una única función afín $L(x) = m(x-a) + b$ tal que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - L(x)}{x - a} = 0.$$

Calcular el valor de m y de b. Al gráfico de $L(x)$ se la denomina la **recta tangente** a $f(x)$ en $x = a$.

8. Para cada una de las siguientes funciones $f(x, y)$, calcular la derivada direccional en la dirección de v en el punto (x_0, y_0)

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad v = (1, 0),\ (x_0, y_0) = (1, 2)$ y $v = (0, 1),\ (x_0, y_0) = (1, 2)$.

   (b) $f(x, y) = 2xy - 3x^2 + y - 5, \quad v = (1, 1),\ (x_0, y_0) = (2, 3)$ y $v = (1, 2),\ (x_0, y_0) = (0, 1)$

   (c) $f(x, y, z) = e^z(xy + z^2), \quad v = (0, 1, 0),\ (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$.

   (d) $f(x, y) = (x + 1)\operatorname{sen} y - 2, \quad v = (1, 0),\ (x_0, y_0)$ cualquiera.

   (e) $f(x, y) = ||(x, y)||, \quad v = (a, b),\ (x_0, y_0) = (0, 0)$ con $||(a, b)|| \neq 0$.

9. (a) Sea $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ y $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(2, 1)$.

   (b) Calcular $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)$ para $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln(y)$

   (c) Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
   Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ para todo vector unitario v.

10. Calcular las funciones derivadas parciales de las siguientes funciones

   (a) $f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$;

   (b) $f(x, y, z) = ye^x + z$;

   (c) $f(x, y) = x^2\operatorname{sen}^2(y)$;

   (d) $f(x, y) = \operatorname{sen} x$;

   (e) $f(x, y, z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2 + y^2 + 1))$;

   (f) $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$;

   (g) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$.

11. Probar que la función $f(x, y) = |x| + |y|$ es continua pero no admite derivadas parciales en el origen.

12. Consideremos la siguiente función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Probar que las únicas direcciones $v \in \mathbb{R}^2$ para las que existe la derivada direccional f_v en el origen son $v = (1,0)$ y $v = (0,1)$. Probar, además, que la función no es continua en el origen.

13. Consideremos la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Probar que f admite derivadas direccionales en el origen para todo vector unitario $v \in \mathbb{R}^2$. Sin embargo, f tampoco es continua en el origen.

14. Sea $f(x,y) = x^{1/3} y^{1/3}$.

(a) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

(b) Mostrar que f es continua en $(0,0)$.

Diferenciabilidad

15. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:

(a) $f(x,y,z) = \sqrt{|xyz|}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(4 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$

16. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Probar que en el origen f es continua, admite todas las derivadas direccionales, pero f no es diferenciable.

17. Sea $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$

(a) Encontrar ecuaciones paramétricas de las rectas tangentes a las siguientes curvas en $t_0 = 0$:

$$\sigma_1(t) = (t+1, 3, f(t+1,3)) \quad \text{y} \quad \sigma_2(t) = (t+1, t+3, f(t+1, t+3)).$$

(b) Encontrar la ecuación de un plano $z = T(x,y)$ que contenga ambas rectas y mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{f(x,y) - T(x,y)}{||(x,y) - (1,3)||} = 0.$$

18. Sea f diferenciable en $(1,2)$ tal que $f(1,2) = 3$, y sean además los vectores $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$. Se sabe que $\frac{\partial f}{\partial v_1}(1,2) = 3$ y que $\frac{\partial f}{\partial v_2}(1,2) = 4$.

(a) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

(b) Encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(1,2,f(1,2))$.

19. Estudiar la existencia de plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos indicados. Si existe, escribir su ecuación.

(a) $f(x,y) = xy + 1 - \text{sen}\left(\frac{x^2}{2}\right)$ en $(1,5)$ y en $(2,2)$.

(b) $f(x,y) = x^{1/4}y^{1/4}$ en $(0,0)$ y en $(16,1)$.

(c) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ en (x_0,y_0) con $y_0 \neq 0$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$ y en $(1,0)$.

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$ y en $(-1,1)$.

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3+x^2(y^2-6y+7)+(y-1)^2(6x+12-8y)}{x^2+2(y-1)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,1) \\ 2 & \text{si} \quad (x,y) = (0,1) \end{cases}$ en $(0,1)$.

20. Usando la expresión del plano tangente para una función f adecuada, aproximar $(0,99e^{0,02})^8$.

21. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar la respuesta.

(a) Una función afín $f(x,y) = ax + by + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

(b) El plano tangente de la función $f(x,y) = x^2 - xy + y^3$ en el punto $(1,1)$ contiene a la recta con ecuación paramétrica

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, 1, -1)$$

(c) Si la función $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $(2,-1)$ con plano tangente

$$z = 2x - 3y + 2$$

entonces la función $g(x,y) = 3x - 2f(x,y) + 5$ es diferenciable en el punto $(2,-1)$ con plano tangente

$$z = -x + 6y + 1$$

(d) El plano tangente de la función $f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + y^3$ en el punto $(1,2)$ contiene a la recta con ecuación paramétrica

$$(x, y, z) = (2, 0, 1) + t(1, -1, 4)$$

(e) Si la función $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $(0,1)$ y el plano tangente en el punto $(0,1)$ de la función $g(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $z = 0$ entonces la función $h(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y) = f(x,y)\ g(x,y)$$

es diferenciable en el punto $(0,1)$.

(f) Si la función $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $(0,0)$ entonces la función

$$g(x,y) = (x^2 + y^2)f(x,y)$$

es diferenciable en el punto $(0,0)$ y su plano tangente es $z = 0$.

Interpretación geométrica del vector gradiente

22. Encontrar la dirección en que la función $z = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(1,1)$. ¿Cuál es la magnitud $||\nabla z||$ en esta dirección? Interpretar geométricamente esta magnitud.

23. Supongamos que la función $h(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ representa la altura de una montaña en la posición (x,y). Estamos parados en un punto del espacio cuyas coordenadas respecto del plano xy son iguales a $(1,0)$. ¿En qué dirección deberíamos caminar para escalar más rápido?

24. (a) Mostrar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$ entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f decrece más rápidamente.
    (b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función
$$f(x, y) = 10 + 6\cos(x)\cos(y) + 4\cos(3y)$$
    En el punto $(\pi/3, \pi/3)$ encontrar las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.

25. Dada la función $f(x, y) = x^3 - xy^2 + y^4$, verificar cada una de las siguientes afirmaciones:
    (a) f crece en la dirección $(0, 1)$ desde el punto $(1, 1)$.
    (b) Desde el punto $(1, 1)$ el mayor crecimiento de f se da en la dirección $(2, 2)$.
    (c) Desde el punto $(1, 1)$, f decrece si nos movemos en la dirección $(-1, 0)$.
    (d) Desde el punto $(1, 1)$ crece en la dirección $(0, 1)$

Generalización a varias variables

26. Calcular el gradiente de f para
    (a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z^2$,
    (b) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$,
    (c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

27. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por
$$T(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 3y)$$
    (a) Verificar que T es una transformación lineal y calcular su matriz asociada (en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$).
    (b) Calcular la matriz de la diferencial $DT(a)$ para $a \in \mathbb{R}^2$. Verificar que es la misma matriz que la hallada en (a).

28. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal.
    (a) Supongamos que T verifica
$$\lim_{v \to \overrightarrow{0}} \frac{||Tv||}{||v||} = 0,$$
    donde $\overrightarrow{0}$ denota el vector nulo. Probar entonces que T es la transformación lineal nula, es decir, para cada $w \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $T(w) = \overrightarrow{0}$.
    (b) Asumiendo que T es diferenciable, deducir que para cada $a \in \mathbb{R}^n$ la diferencial $DT(a)$ es igual a T.

29. Para cada una de las siguientes funciones, calcular $DF(a)$ para a en el dominio de F.

    (a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, y)$
    (b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$
    (c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$
    (d) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x) = ||x||^2$

Regla de la Cadena

30. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable con derivada positiva en todo punto y

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty.$$

    (a) Probar que f es biyectiva
    (b) Usando el hecho que f^{-1} es derivable (no hace falta probarlo) concluir que, si $y \in \mathbb{R}$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

    Mostrar que la derivada de $g(x) = atan(x)$ es $\frac{1}{1+x^2}$.

31. Sean $f(u, v, w) = u^2 + v^3 + wu$ y $g(x, y) = x\text{sen}\,(y)$. Además, tenemos la siguiente dependencia respecto de t,

$$u(t) = t^2 + 1, v(t) = \text{sen}\, t, w(t) = t - 1 \text{ y } x(t) = \text{sen}\, t, y(t) = t,$$

donde t es una nueva variable. Bajo estas condiciones, calcular las derivadas respecto de t de las funciones

$$f\left(u(t), v(t), w(t)\right) \text{ y } g\left(x(t), y(t)\right),$$

en dos formas diferentes:

    (a) usando la regla de la cadena.
    (b) sustituyendo.

32. Sean $f(u, v) = e^{uv}\text{sen}\,(u^2 + v^2), g(u, v, w) = \ln(u^2 + v^2 + w^2 + 1)$. Dadas

$$u(x, y) = x + y, \quad v(x, y) = xy, \quad w(x, y) = x - y + 1$$

calcular las derivadas parciales de las funciones

$$f\left(u(x, y), v(x, y)\right) \text{ y } g\left(u(x, y), v(x, y), w(x, y)\right)$$

    (a) usando la regla de la cadena.
    (b) sustituyendo.

33. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

(a) $F(x,y) = G\left(f(x)g(y), f(x)h(y)\right)$ (b) $F(x,y) = G(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$

(c) $F(x,y) = G(x, G(x,y))$ (d) $F(x,y) = f(x)^{g(y)} (\text{si} f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R})$

34. (a) ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}_{>0}$ es

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^p \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

diferenciable en $\mathbb{R}^2$?¿Para qué valores de p es f de clase C^1?

(b) La función f se puede escribir como $g(x^2+y^2)$ con $g(t) = t^p \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$ si $t > 0$ y $g(0) = 0$. ¿Qué conclusiones se obtienen si se estudia la diferencibilidad de g?

35. Sea $f(x,y)$ diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Se dice que f es homogénea de grado 1 si $\forall t > 0$ y $\forall (x,y) \neq (0,0)$ se verifica $f(t(x,y)) = tf(x,y)$. Probar que f es homogénea de grado 1 si y solo si

$$\nabla f(x,y) \cdot (x,y) = f(x,y) \qquad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

36. (a) Sea $f : B \to \mathbb{R}$ diferenciable, donde B es una bola en $\mathbb{R}^2$.

i. Probar que si f es constante en B, entonces $\nabla f(a,b) = 0$, cualquiera sea $(a,b) \in B$.

ii. Probar que si $\nabla f(a,b) = 0$ para cada $(a,b) \in B$, entonces f es constante en B. (*Sugerencia:* utilizar el Teorema de Valor Medio.)

(b) Si $f, g : B \to \mathbb{R}$ son diferenciables, y verifican que $\nabla f(a,b) = \nabla g(a,b)$ para todo $(a,b) \in B$, probar que entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = g(x,y) + c.$$