Práctica 1: Preliminares

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

   a) $|x+3| < 1$ *b)* $|3x-1| < |x-1|$ *c)* $|x-3| \geq 1$

   d) $|x| > |x+3|$ *e)* $\left|\dfrac{x-2}{3x+1}\right| \leq 1$

2. Representar los siguientes conjuntos en la recta real.

   (a) $\{x : |x-1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\}$
   (b) $\{x : |x-3| < |2-x|\}$
   (c) $\{x : 0 < x^2 \leq x^3\}$
   (d) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| + |x-9| > 2\}$
   (e) $B = \{x \in \mathbb{R} : \big||x+2| - |x-1|\big| < 1\}$
   (f) $C = \{x \in \mathbb{R} : |x^3-1| + |2-x^3| = 1\}$

3. Sea $a \geq 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

   a) $|a+b| = |a| + |b|$ *b)* $|a+b| < |a| + |b|$

   c) $|a-b| = |a| + |b|$ *d)* $|a-b| < |a| + |b|$

   e) $\big||a| - |b|\big| = |a-b|$ *f)* $\big||a| - |b|\big| < |a-b|$

4. Sean a y b números reales. Decidir para qué valores de a y de b son válidas cada una de las siguientes afirmaciones

   a) $a < a^2$ *b)* $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

   c) $a > 0 \Rightarrow ab \geq b.$ *d)* $a + b \geq \max\{a, b\}$

5. Sean $0 \leq x \leq y$. Probar que $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.

6. (a) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:
   i. $\mathbb{R}_{>0}$;
   ii. $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$.

   (b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente:
   i. $\mathbb{Z}$;
   ii. $\{x^{-1} : x < 0\}$;
   iii. $\operatorname{Im}(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

7. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo. En caso de poseerlos, calcularlos:

   a) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ y } 20 < n \leq 35\}$
   b) $A = \{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
   c) $A = \{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$
   d) $A = \{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$

8. (a) Considerar el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$. Calcule su supremo y concluya que A no tiene máximo.

   (b) Dado el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q}_{>0} : \ a^2 > 2\} \subset \mathbb{R}$, calcule su ínfimo y concluya que B no tiene mínimo.

9. Calcular

   a) $\sup\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$
   b) $\sup\{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N}\}$
   c) $\inf\{\frac{n-3}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$
   d) $\inf\{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}$

10. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo respectivamente.

    (a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ entonces $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.

    (c) Si $a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 2$.

    (d) Si $a_n < 2 - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 2$.

11. Calcular $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}$ y determinar, para cada $\varepsilon > 0$ de la siguiente tabla, un valor $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $|\frac{n+1}{n} - \ell| < \varepsilon$ si $n > n_0$.

ε	$0,1$	$0,027$	$0,00001$	10^{-6}
n_0				

12. Dadas las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Probar que:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Sugerencia: Notar que a_n y b_n constan de $n+1$ términos. Usar el principio de comparación.

13. Sea $a_n = \frac{4n-10}{n+1}$.

(a) Encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumpla que $3 < a_n < 5$.

(b) Encontrar, si existen, $\max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

14. Sean $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tales que $a_o > b_0 > 0$. Se consideran las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas recurrentemente por:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $a_n \geq b_n$ para todo natural n.

(b) $\{a_n\}_n$ es decreciente y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

(c) $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones convergentes y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

15. (*) Sea $0 < a_1 < 1$ un número positivo. Se define la siguiente sucesión dada por recurrencia:

$$a_{n+1} := sen(a_n).$$

Probar que $\{a_n\}_n$ es una sucesión convergente y calcular su límite.

16. (a) Probar que $\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

(b) Calcular $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{7}{2^j}$ y $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{3}{4^j}$.

17. (a) Probar que $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$. Sugerencia: Sumar el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, etc.

(b) (*) Sea $\{k_n\}_n$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Sea

$$a_n := \frac{k_1 + \cdots + k_n}{k_n^2},$$

probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ se tiene que $a_n \leq 1/2 + \varepsilon$.

Métricas y topología en $\mathbb{R}^n$

18. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones en $\mathbb{R}^2$. Representar las soluciones en el plano.

    a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \leq 2\}$

    b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| > 2\}$

    c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

    d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

    e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 3\}$

    f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + |y + 1| \geq 1\}$

    g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} = 1\}$

    h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} < 1\}$

19. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se define $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ y $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, ..., n\}$. Mostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

    (a) $|x_i| \leq \|x\|_2$, si $i = 1, \ldots, n$;

    (b) $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$;

    (c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$. Describir geométricamente esta doble desigualdad.

20. Representar gráficamente los siguientes conjuntos A.

    (a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + (y-1)^2 \leq 3\}$

    (b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < 5x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, |y| \leq \sqrt{5}\}$

    (c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \frac{y^2}{4} < 1\}$

    (d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge x^2 + y^2 + (z+1)^2 < 1\}$;

    (e) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 > 1/2\}$.

21. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos, cerrados y/o acotados:

    (a) $K_1 = B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;

    (b) $K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

    (c) $K_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$;

    (d) $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;

    (e) $K_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$.

22. Calcular ∂A, $\bar{A}$, $\bar{A} \setminus A$ y $A \setminus \partial A$ para los conjuntos A que aparecen en el ejercicio 21. Recuerde que

    - ∂A es el borde de A,
    - $\bar{A}$ es la clausura de A y
    - $C \setminus D$ es el conjunto de puntos en C que no pertenecen a D.