Ecuaciones diferenciales con retardo

Clase 2, versión preliminar (las críticas son bienvenidas)

En la primera clase hemos propuesto un problema elemental de control, que nos llevó a considerar la ecuación con feedback

$$u'(t) = -\alpha u(t-\tau). \tag{1}$$

Si bien el planteo original corresponde al caso $\alpha > 0$, denominado de feedback negativo, también tiene sentido considerar $\alpha < 0$, es decir, feedback positivo. Si $\tau = 0$, el equilibrio $u \equiv 0$ es asintóticamente estable en el primer caso, e inestable en el segundo. A partir de ahora supondremos $\tau > 0$.

Al comienzo del curso mencionamos el caso particular $\alpha = -1$ que, según dijimos, tiene infinitas soluciones de la forma $e^{\lambda t}$. Más precisamente, dijimos que las raíces de la *ecuación característica* asociada forman una sucesión $\{\lambda_n\}$ con $|\lambda_n| \to \infty$. En consecuencia, cualquier combinación lineal de la forma $\sum_{n=1}^{N} a_n e^{\lambda_n t}$ es solución y, más aun, es fácil ver que, para algún espacio funcional apropiado, también es solución cualquier serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t}$ (Aclaración: existen haber series convergentes de esa forma... ¿por qué? Ver ejercicio xxxx). Cabe ahora repetir la pregunta de la primera clase: ¿puede haber más soluciones? Esto ya no parece tan sencillo, aunque todavía tenemos a mano una respuesta casi inmediata: hasta ahora no hemos tenido en cuenta la *multiplicidad* de las raíces características. Es claro (¿por qué?) que no puede haber raíces con multiplicidad infinita; además, veremos que si λ es una raíz de multiplicidad k entonces cualquier función de la forma $p(t)e^{\lambda t}$, con p un polinomio de grado menor que k es solución. De todas formas, en este caso no es gran cosa lo que se agrega pues existe a lo sumo una raíz múltiple y, en tal caso, su multiplicidad es 2 (Ejercicio: ver que esto ocurre únicamente cuando $\alpha = \frac{1}{\tau e}$). Si por comodidad suponemos que esta posible raíz doble es la primera, entonces tendríamos soluciones de la forma

$$ate^{\lambda_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t}.$$

Ya con cierta impaciencia, preguntamos una vez más: ¿son estas todas las soluciones?

Responder esto es bastante más complicado y no lo veremos en detalle (para la resolución completa, se puede ver [1]). Pero el planteo nos ayudará a entender mejor la diferencia con el caso $\tau = 0$. En el caso de una ecuación lineal de orden n con coeficientes constantes

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0,$$

la ecuación característica tiene n raíces complejas (contadas con su multiplicidad) y cada raíz de multiplicidad k tiene asociado un espacio de soluciones que tiene también dimensión k. Por otro lado, sabemos que el conjunto de soluciones tiene dimensión n, lo que permite deducir que *todas* las soluciones son de la forma

$$\sum_{j=1}^{J} p_j(t) e^{\lambda_j t},$$

donde $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_J\}$ son las raíces características y el polinomio p_j es 0 o tiene multiplicidad menor que la multiplicidad algebraica de λ_j. Y todo esto, en definitiva, nos resulta muy razonable pues, para cada condición inicial

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1,\ \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$$

existe una única solución, lo que determina un isomorfismo entre $\mathbb{C}^n$ y el espacio de soluciones. Pero para nuestra ecuación (1) el espacio de soluciones tiene dimensión infinita, lo que nos lleva a observar que otro tanto debe ocurrir con el espacio de condiciones iniciales y, en consecuencia, la dimensión no alcanza para probar que no hay más soluciones que las antes mencionadas.

En efecto, resolver un problema de valores iniciales para (1) significa algo diferente que en el caso sin retardo. No basta con prescribir el valor de u en cierto t_0: en efecto, para poder obtener una solución definida en $[t_0, t_0 + \delta]$ debemos conocer su valor en el intervalo $[t_0 - \tau, t_0 + \delta - \tau]$. Lo que se hace, entonces, es tomar como dato inicial una *función* definida en el intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$. Podemos suponer que $t_0 = 0$ y que el dato inicial es una función continua $\phi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}$. En tal caso, sobre el intervalo $[0, \tau]$ la ecuación se reduce, gracias a la condición inicial, a una ecuación completamente ordinaria (en más de un sentido):

$$u'(t) = -\alpha \phi(t).$$

Tenemos, además, la condición $u(0) = \phi(0)$, lo que nos permite obtener de manera única la solución

$$u(t) = \phi(0) - \alpha \int_0^t \phi(s - \tau)\, ds.$$

Observemos que u resulta continua en $[-\tau, \tau)$ y de clase C^1 en $(0, \tau)$. Sin embargo, tiene por qué resultar derivable en el 0, a menos que ϕ lo sea y, ademas, valga $\phi'(0^-) = u'(0^+) = -\alpha u(0 - \tau) = -\alpha \phi(-\tau)$. Esto nos permite comprender qué entenderemos, en general, por 'solución' de una ecuación del tipo $x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau))$: una función continua $x : [t_0 - \tau, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ que es diferenciable en $(t_0, t_0 + \delta)$ y satisface la ecuación en dicho intervalo. Por otro lado, la forma de resolver la ecuación para $[\tau, 2\tau]$ nos permite mostrar un hecho característico de las ecuaciones con retardo: en general se pueden resolver hacia adelante, pero no hacia atrás. En efecto, si queremos hacer lo mismo que antes para $t \in [-\tau - \delta, -\tau)$, debe valer:

$$-\alpha u(t) = u'(t+\tau).$$

Como vale la condición inicial $u = \phi$ en $[-\tau, 0]$, debemos pedir en primer lugar que ϕ sea de clase C^1 en $[-r, 0]$, donde $r = \min\{\delta, \tau\}$. De esta forma, se obtiene para $t \in [-\tau - r, \tau]$:

$$u(t) = -\frac{\phi(t+\tau)}{\alpha}.$$

En particular, $u(-\tau) = -\frac{\phi(0)}{\alpha}$, mientras que, por otro lado, la condición inicial dice que $u(-\tau) = \phi(-\tau)$. Esto determina dos condiciones necesarias para que exista solución:

1. $\phi \in C^1([-r, 0])$.
2. Condición de compatibilidad: $\phi(-\tau) = -\frac{\phi(0)}{\alpha}$.

Volviendo a la solución hacia adelante (*forward*), el procedimiento anterior puede repetirse ahora para el intervalo $[\tau, 2\tau]$ y así sucesivamente, dando lugar al llamado *método de pasos*. Inductivamente, conocida ya la solución en el intervalo $[(n-1)\tau, n\tau]$ se obtiene, para $n\tau \le t \le (n+1)\tau$:

$$u(t) = u(n\tau) - \alpha \int_{n\tau}^{t} u(s-\tau)\, ds.$$

Es fácil verificar que u está definida para todo $t \ge -\tau$ y resulta de clase C^n en el intervalo $((n-1)\tau, +\infty)$. Por ejemplo, para $\phi \equiv 1$ se tiene, para $0 \le t \le \tau$:

$$u'(t) = -\alpha, \qquad u(0) = 1,$$

de donde $u(t) = 1 - \alpha t$. Luego, para el intervalo $[\tau, 2\tau]$:

$$u'(t) = -\alpha u(t-\tau) = -\alpha(1 - \alpha(t-\tau))$$

y entonces

$$u(t) = u(\tau) - \alpha(t-\tau) + \alpha^2 \frac{(t-\tau)^2}{2}\Big|_{\tau}^{t}.$$

Finalmente, observando que $u(\tau) = 1 - \alpha\tau$, resulta:

$$u(t) = 1 - \alpha t + \alpha^2 \frac{(t-\tau)^2}{2}.$$

Inductivamente, se prueba que en el intervalo $[(n-1)\tau, n\tau]$ vale

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n} (-\alpha)^k \frac{(t-(k-1)\tau)^k}{k!}.$$

En efecto, de acuerdo con lo anterior la fórmula vale para $n = 1$ y $n = 2$; si suponemos que vale para n entonces, para $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$ resulta

$$u'(t) = -\alpha u(t-\tau) = \sum_{k=0}^{n}(-\alpha)^{k+1}\frac{(t-k\tau)^k}{k!}$$

y en consecuencia

$$u(t) = u(n\tau) + \sum_{k=1}^{n+1}(-\alpha)^k\frac{(t-(k-1)\tau)^k}{k!}\Big|_{n\tau}^{t}.$$

Pero

$$u(n\tau) = \sum_{k=0}^{n}(-\alpha)^k\frac{(n\tau-(k-1)\tau)^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1}(-\alpha)^k\frac{(n\tau-(k-1)\tau)^k}{k!},$$

lo que prueba que la fórmula vale en $[n\tau,(n+1)\tau]$.

Respecto de la solución general para $[-\tau,+\infty)$, cabe señalar que la fórmula obtenida mediante el método de pasos no es de gran utilidad para estudiar propiedades cualitativas de u, razón por la cual conviene encarar un estudio directo. A tal fin, comencemos por rescalar convenientemente la ecuación para obtener una más sencilla. Definimos

$$s := \eta t, \qquad U(s) := u(t)$$

y de esta forma resulta

$$U'(s) = \frac{u'(t)}{\eta} = -\frac{\alpha}{\eta}u(t-\tau) = -\frac{\alpha}{\eta}U(\eta(t-\tau)) = -\frac{\alpha}{\eta}U(s-\eta\tau).$$

Luego, podemos elegir $\eta = \frac{1}{\tau}$, $\beta = \alpha\tau$ y la ecuación se transforma en

$$U'(s) = -\beta U(s-1).$$

Para efectuar un análisis detallado de esta ecuación, consideremos el operador lineal $L : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ dado por

$$LU(s) := U'(s) + \beta U(s-1).$$

Siguiendo el procedimiento habitual en la teoría de ecuaciones ordinarias, calculemos ahora

$$L(e^{\lambda s}) = \lambda e^{\lambda s} + \beta e^{\lambda(s-1)} = e^{\lambda s}(\lambda + \beta e^{-\lambda}).$$

Igualando a 0 se obtiene la *ecuación característica* que, como anticipamos en la introducción, no es una ecuación polinomial sino trascendente:

$$h(\lambda) := \lambda + \beta e^{-\lambda} = 0.$$

La relación entre h y las soluciones de la ecuación viene dada por el siguiente resultado.

Lema 0.1 *Son equivalentes:*

1. *λ es raíz de orden n de h.*
2. *$s^j e^{\lambda s}$ es solución de la ecuación para $j = 0, \dots n-1$.*

<u>*Demostración*</u>: Para $k \leq n-1$ se tiene:

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\Big(L(e^{\lambda s})\Big) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\Big(e^{\lambda s} h(\lambda)\Big) = \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \frac{\partial^j h}{\partial \lambda^j} \frac{\partial^{k-j}}{\partial \lambda^{k-j}}(e^{\lambda s})$$

$$= e^{\lambda s} \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) h^{(j)}(\lambda) s^{k-j}.$$

Por otro lado, por linealidad vale

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\Big(L(e^{\lambda s})\Big) = L\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}(e^{\lambda s})\right) = L(s^k e^{\lambda s})$$

y entonces

$$L(s^k e^{\lambda s}) = 0 \quad \forall k = 0, \dots n-1 \Longleftrightarrow h^{(j)}(\lambda) = 0 \quad \forall j = 0, \dots n-1$$

$\square$

Observación 0.1 *Como mencionamos, si $\beta \neq \frac{1}{e}$ entonces todas las raíces son simples, mientras que si $\beta = \frac{1}{e}$ entonces $\lambda = -1$ es la única raíz múltiple y la multiplicidad es exactamente igual a 2. En efecto, λ es una raíz múltiple si y solo si $h(\lambda) = h'(\lambda) = 0$, vale decir:*

$$\lambda + \beta e^{-\lambda} = 0 = 1 - \beta e^{-\lambda},$$

de donde se deduce:

$$\lambda = -1, \qquad \beta e = 1.$$

Finalmente, observemos que $h''(\lambda) = \beta e^{-\lambda} \neq 0$, de modo que en el último caso la multiplicidad es 2. Si $\beta \neq \frac{1}{e}$ y ϕ es de clase C^1 entonces se puede probar que, como anticipamos, la solución general toma, para $t > 0$, la forma

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t}$$

en donde los coeficientes a_n se pueden calcular en forma explícita. [1] *Fórmulas un poco más complicadas valen para el caso general (ver [1]).*

Por otro lado, el siguiente lema se deduce en forma inmediata del hecho de que $\overline{e^{-\lambda}} = e^{-\overline{\lambda}}$.

[1] En particular, esto implica que $|\lambda_n|$ no se puede ir demasiado rápido a infinito. En general, este tipo de resultados es válido para cualquier función analítica, ver [2].

Lema 0.2 *λ es raíz de $h \Longleftrightarrow \overline{\lambda}$ es raíz de h.*

Como en la introducción, el teorema de Picard (y también el resultado mencionado en la Observación 0.1) garantiza la existencia de infinitas raíces complejas de h; sin embargo, para nuestro análisis será suficiente con observar algo mucho más elemental, que se desprende directamente del hecho de que h es una función analítica en $\mathbb{C}$ y obviamente no constante, por lo cual sus ceros son aislados y de orden finito. Esto implica que, en cualquier compacto, h tiene a lo sumo una cantidad finita de ceros (contados con su multiplicidad); más aun:

Lema 0.3 *la cantidad de ceros en un conjunto de la forma $\{\mathrm{Re}(\lambda) \geq a\}$ es finita para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Si $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de raíces distintas, entonces $|\lambda_n| \to +\infty$. Pero

$$|\lambda_n| = \left|\beta e^{\lambda_n}\right| = |\beta| e^{-\mathrm{Re}(\lambda_n)}$$

y en consecuencia $\lambda_n \to -\infty$. $\square$

Observemos que las raíces de h no son en general fáciles de obtener: escribiendo $\lambda = x + iy$, se cumple que $h(\lambda) = 0$ si y solo si (x, y) es solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = -\beta e^{-x}\cos y \\ y = \beta e^{-x}\operatorname{sen} y. \end{cases} \tag{2}$$

Sin embargo, muchas conclusiones sobre el comportamiento de las soluciones de nuestra ecuación diferencial se pueden obtener a partir de cierta información muy básica sobre las raíces de h, que se resume en los próximos resultados. El primero de ellos concierne a las raíces reales de h y permitirá extraer conclusiones respecto de la oscilación de las soluciones.

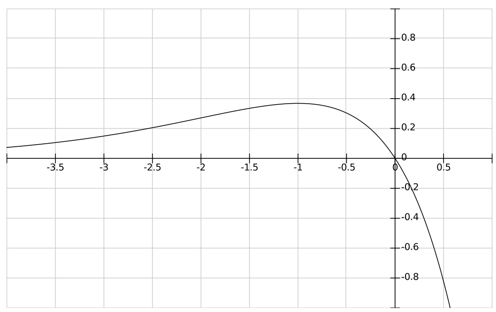
Proposición 0.1 *Se cumple:*

1. *Si $\beta < 0$, entonces h tiene una única raíz real $\lambda > 0$.*
2. *Si $0 < \beta < \frac{1}{e}$, entonces h tiene exactamente dos raíces reales $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, con*
$$\lambda_1 \to -\infty, \qquad \lambda_2 \to 0^-$$
para $\beta \to 0^+$.
3. *Si $\beta = \frac{1}{e}$, entonces $\lambda = -1$ es la única raíz real de h y tiene multiplicidad 2.*
4. *Si $\beta > \frac{1}{e}$, entonces h no tiene raíces reales.*

Demostración: De acuerdo con lo anterior, $\lambda = x$ es una raíz real si y solo si $g(x) = 0$, donde $g(x) := x + \beta e^{-x}$.

Para $\beta < 0$, se tiene $g'(x) = 1 - \beta e^{-x} > 0$; por otro lado, $g(0) = \beta < 0$ y $g(x) \to +\infty$ para $x \to +\infty$. En consecuencia, g tiene una única raíz real $x > 0$.

Para $\beta > 0$, podemos escribir la ecuación $g(x) = 0$ como $\varphi(x) = \beta$, donde $\varphi(x) := -xe^x$. Todas las propiedades se deducen de manera inmediata a partir de un simple estudio de φ, cuya gráfica tiene esta forma:



□

Con ayuda del siguiente lema, la proposición previa permitirá mostrar que las soluciones oscilan cuando el retardo es suficientemente grande.

Lema 0.4 *Son equivalentes:*

i) Toda solución del problema $u'(t) = -\alpha u(t - \tau)$ *oscila.*

ii) La ecuación característica $\lambda + \alpha e^{-\lambda\tau} = 0$ *no tiene soluciones reales.*

<u>*Demostración*</u>:

i) $\Rightarrow$ *ii)* es trivial, pues si λ es una raíz característica real, entonces $u(t) = e^{\lambda t}$ es una solución no oscilatoria. Para la recíproca, supongamos que la ecuación no tiene raíces reales, luego $\alpha > 0$ y existe $M > 0$ tal que $\lambda + \alpha e^{-\lambda\tau} \geq M$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente,

$$-\lambda + \alpha e^{\lambda\tau} \geq M \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Si u es una solución que no oscila, reemplazando por $-u$ si hace falta, podemos suponer que existe t_0 tal que $u(t) > 0$, situación que escribiremos directamente de la siguiente forma, para evitar la referencia explícita a t_0: $u(t) > 0$ para $t \gg 0$. Consideremos el siguiente conjunto

$$\Lambda := \{\lambda \geq 0 : u'(t) + \lambda u(t) \leq 0 \, \text{para } t \gg 0\}.$$

En primer lugar, observemos que $0 \in \Lambda$, pues $u'(t) = -\alpha u(t - \tau) < 0$ si $t \gg 0$; por otra parte, Λ es un intervalo, ya que si $\lambda \in \Lambda$ y $0 \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda$ entonces, para $t \gg 0$,

$$u'(t) + \tilde{\lambda} u(t) \leq u'(t) + \lambda u(t) \leq 0.$$

Afirmamos que si $\lambda \in \Lambda$ entonces $\lambda + M \in \Lambda$, lo que prueba que $\Lambda = [0, +\infty)$. En efecto, para $t \gg 0$ se tiene que $u'(t) \leq -\lambda u(t) \leq 0$ y entonces $u(t) \leq u(t - \tau)$ para $t \gg 0$. Se deduce que

$$u'(t) + \alpha u(t) \leq u'(t) + \alpha u(t - \tau) = 0,$$

es decir, $\alpha \in \Lambda$. Consideremos la función $\phi(t) := e^{\lambda t} u(t)$, que verifica

$$\phi'(t) = e^{\lambda t}(u'(t) + \lambda u(t)) \leq 0$$

para $t \gg 0$. Además,

$$u'(t) + (\lambda + M)u(t) = -\alpha u(t - \tau) + (\lambda + M)u(t)$$

$$= -\alpha e^{-\lambda(t-\tau)}\phi(t - \tau) + (\lambda + M)e^{-\lambda t}\phi(t) \leq e^{-\lambda t}\phi(t)\left(-\alpha e^{\lambda\tau} + \lambda + M\right)$$

para $t \gg 0$, pues ϕ es decreciente. Usando (3) se deduce que

$$u'(t) + (\lambda + M)u(t) \leq 0,$$

es decir: $\lambda + M \in \Lambda$.

Lo anterior implica que $\Lambda = [0, +\infty)$ aunque, por otra parte, veremos que existe al menos un valor positivo $\lambda \notin \Lambda$, lo que es absurdo. Este resultado es de utilidad en otras situaciones un poco más generales, así que lo planteamos a continuación en la forma de un nuevo lema.

$\square$

Lema 0.5 *Sean $\alpha, \tau > 0$ y u tales que $u(t) > 0$ y $u'(t) \leq -\alpha u(t - \tau)$ para $t \gg 0$. Sean Λ como antes y $C := \left(\frac{2}{\alpha\tau}\right)^2$. Entonces*

$$u(t) \leq u(t - \tau) < Cu(t)$$

para $t \gg 0$ y $\lambda_0 \notin \Lambda$, donde

$$\lambda_0 := \frac{1}{\tau}\ln C > 0.$$

<u>Demostración</u>: Integrando entre t y $t + \frac{\tau}{2}$ obtenemos, para $t \gg 0$,

$$0 \geq \int_t^{t+\frac{\tau}{2}} [u'(s) + \alpha u(s - \tau)]\, ds = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u(t) + \alpha \int_{t-\tau}^{t-\frac{\tau}{2}} u(s)\, ds.$$

Como u decrece para $s \gg 0$, se deduce que

$$u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u(t) + \frac{\alpha\tau}{2} u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \leq 0$$

y luego

$$\frac{\alpha\tau}{2} u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) < u(t).$$

De la misma forma se ve que

$$\frac{\alpha\tau}{2} u\left(t - \tau\right) < u\left(t - \frac{\tau}{2}\right),$$

lo que prueba que $u(t - \tau) < Cu(t)$. Como u es decreciente, vale también que $u(t) \leq u(t - \tau)$, lo que a su vez implica que $C > 1$ y luego $\lambda_0 > 0$. Supongamos *ahora que* $\lambda_0 \in \Lambda$, *es decir,* $u'(t) + \lambda u(t) \leq 0$ *para* $t \gg 0$. *Entonces* $\phi(t) := e^{\lambda_0 t} u(t)$ *verifica* $\phi'(t) = e^{\lambda_0 t}(u'(t) + \lambda_0 u(t)) \leq 0$ *y en consecuencia*

$$\phi(t-\tau) \geq \phi(t)$$

para $t \gg 0$. *Luego*

$$u(t-\tau) \geq e^{\lambda_0 \tau} u(t) = Cu(t),$$

lo que es absurdo.

□

De lo anterior se deduce:

$$\text{Toda solución de (1) oscila} \Longleftrightarrow \tau\alpha > \tfrac{1}{e}.$$

References

[1] Bellman, R., Cooke, K., Differential-Difference Equations, Academic Press, 1963.

[2] Rudin, Análisis Real y Complejo.