Cálculo Avanzado - Primer Cuatrimestre de 2016

Práctica 8: Separabilidad

---

1. Probar que $\mathbb{R}^n$ es separable.

2. ¿Es el espacio $(l^\infty, d_\infty)$ separable?

3. Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid \exists\, n_0 : a_n = 0 \ \forall\, n \geq n_0\}$ y $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ dada por
$$d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|.$$
Probar que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico separable.

4. Sean $(X, d)$ e $(Y, d')$ espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica $d_\infty$ definida por
$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}.$$
Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si $(X, d)$ e $(Y, d')$ son separables.

5. Sea $(X, d)$ un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de $X$ no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable.

6. Sea $(X, d)$ un espacio métrico separable y sea $Y \subset X$. Probar que si $Y$ no es finito ni numerable, entonces $Y$ tiene al menos un punto de acumulación.

7. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

8. Sean $X, Y$ espacios métricos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suryectiva. Probar que si $X$ es separable, entonces $Y$ es separable.