

FORMA DE JORDAN

AL-2do 2012 20-11-12 (1)

(II) Matrices en $\mathbb{C}^{n \times n}$

Ejemplo

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^4 \Rightarrow m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^m$$

para algún m ,
 $1 \leq m \leq 4$

Pero $N = A - 2\text{Id}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es claramente nilpotente:

$$\left. \begin{array}{l} e_1 \mapsto e_2 + e_3 + e_4 \mapsto -e_4 + e_1 = 0 \\ e_2 \mapsto -e_4 \mapsto 0 \\ e_3 \mapsto e_4 \mapsto 0 \\ e_4 \mapsto 0 \end{array} \right\} m_N = \lambda^2 \text{ y } \text{rg}(N) = 2 \Rightarrow$$

$$N \simeq \left[\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{array} \right] = J_0, \text{ Base } \mathcal{B} = (e_1, Ne_1, e_3, Ne_3) \\ = (e_1, e_2 + e_3 + e_4, e_3, e_4)$$

$$\Rightarrow J_0 = P^{-1} N P \text{ con } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y por lo tanto}$$

$$J = J_0 + 2\text{Id} = P^{-1} (N + 2\text{Id}) P = P^{-1} A P$$

$$\text{i.e. } A \simeq \left[\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{array} \right] = J, \quad J = P^{-1} A P, \text{ con misma matriz } P$$

(2) El caso anterior se generaliza directamente a

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ con } \chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m.$$

Entonces, $N = A - \lambda_0 \text{Id}_n$ es nilpotente con $m_N(\lambda) = \lambda^m$, $m \leq n$

y se tiene que existe $P \in GL(n, \mathbb{C})$ tq

$$J_0 = P^{-1} N P \quad (J_0 \text{ forma de Jordan de la matriz nilpotente } N)$$

y por lo tanto

$$J = J_0 + \lambda_0 \text{Id}_n = P^{-1} (N + \lambda_0 \text{Id}_n) P = P^{-1} A P: \quad J = \left[\begin{array}{c} \overline{J(\lambda_0, m_1)} \\ \vdots \\ \overline{J(\lambda_0, m_r)} \end{array} \right] \text{ con } J(\lambda_0, m_i) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

$\leftarrow m_i \rightarrow$

$$\textcircled{3} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \chi_A(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda-3)$$

Obs 1: $\forall x \in \mathbb{C}^4, (A-2\text{Id})^3(A-3\text{Id})x = 0$

Pero $(\lambda-2)^3 \perp (\lambda-3) \in \mathbb{C}[\lambda]$: $\exists s, t \in \mathbb{C}[\lambda]$ t.q.

$$s(\lambda)(\lambda-2)^3 + t(\lambda)(\lambda-3) = 1$$

$$\Rightarrow s(A)(A-2\text{Id})^3 + t(A)(A-3\text{Id}) = \text{Id}$$

$$\Rightarrow \underbrace{s(A)(A-2\text{Id})^3 x}_{\in N(A-3\text{Id})} + \underbrace{t(A)(A-3\text{Id}) x}_{\in N(A-2\text{Id})^3} = x \quad (*)$$

$$\Rightarrow x \in N(A-3\text{Id}) + N(A-2\text{Id})^3$$

Obs 2 $N(A-2\text{Id})^3 \cap N(A-3\text{Id}) = \{0\}$ pues

por $(*)$ arriba: $x \in N(A-2\text{Id})^3 \cap N(A-3\text{Id}) \Rightarrow x = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{C}^4 = N(A-2\text{Id})^3 \oplus N(A-3\text{Id})$$

Obs 3: $N(A-2\text{Id})^3$ y $N(A-3\text{Id})$ son A -invariantes:

$$x \in N(A-2\text{Id})^3 \Rightarrow (A-2\text{Id})^3 Ax = A(A-2\text{Id})^3 x = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow Ax \in N(A-2\text{Id})^3$$

$$\text{y } x \in N(A-3\text{Id}) \Rightarrow (A-3\text{Id}) Ax = A(A-3\text{Id})x = A \cdot 0 = 0 \Rightarrow Ax \in N(A-3\text{Id})$$

Obs 4: Sean $f_1 := f_A|_{N(A-2\text{Id})^3}$ y $f_2 := f_A|_{N(A-3\text{Id})}$

entonces $m_{f_1} = (\lambda-2)^m$ para algún m , $1 \leq m \leq 3$

$$m_{f_2} = \lambda-3$$

pues por def. $(\lambda-2\text{Id})^3(A)(x) = 0, \forall x \in N(A-2\text{Id})^3$

así $m_{f_1} \mid (\lambda-2\text{Id})^3$

y $(\lambda-3\text{Id})(A)(x) = 0, \forall x \in N(A-3\text{Id}) \Rightarrow m_{f_2} = \lambda-3$

Obs 5: $\chi_{f_1} = (\lambda-2)^3$ y $\chi_{f_2} = (\lambda-3)$

pues sabemos $\chi_A = (\lambda-2)^3$ y $\chi_{f_2} = (\lambda-3)^*$ pero en $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$
base de $N(\lambda-2\text{Id})^3$ base de $N(\lambda-3\text{Id})$

$$[f]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} [f_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ \hline 0 & [f_2]_{\mathcal{B}_2} \end{array} \right]; \quad \chi_f = \chi_{f_1} \cdot \chi_{f_2} = (\lambda-2)^3(\lambda-3)$$

$$\Rightarrow \chi_{\mathcal{B}} = (\lambda-2)^3, \quad \chi_{\mathcal{B}_2} = (\lambda-3)$$

$A \simeq \left[\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline & A_2 \end{array} \right]$ con $\chi_{A_1} = (\lambda - 2)^3$ y $\chi_{A_2} = \lambda - 3$

y por lo tanto $A_1 \simeq \begin{bmatrix} 2 & & \\ ? & 2 & \\ & ? & 2 \end{bmatrix}$ y $A_2 = [3]$

¿Cómo sabemos cómo es A_1 ? Podemos mirar $\text{rg}(A - 2\text{Id})$:

$A - 2\text{Id} \simeq \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & & \\ ? & 0 & \\ & ? & 0 \end{bmatrix} & \\ \hline & [3-2] \end{array} \right] \Rightarrow \text{rg}(A - 2\text{Id})$ indica la cantidad de bloques en A_1 .

Aquí $A - 2\text{Id} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene rango 2. Eso indica que

$\begin{bmatrix} 0 & & \\ ? & 0 & \\ & ? & 0 \end{bmatrix}$ tiene rango 1 (pues el bloquecito $[3-2]$ tiene rango 1)

y por lo tanto $A_1 \simeq \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \simeq \begin{bmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow m_A = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)$

Y ya sabemos qué base estamos buscando, lo podemos hacer de un segue

$N(A - 2\text{Id}) = \langle e_1, e_2 + e_3 + e_4 \rangle$ y $(A - 2\text{Id})^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow N((A - 2\text{Id})^2) = \langle e_1, e_2 + 2e_3, e_3 - e_4 \rangle$

$\Rightarrow$ Podemos elegir para v_1 o bien a $e_2 + 2e_3$ o bien a $e_3 - e_4$ que completan la base de $N((A - 2\text{Id})^2)$.

Pongamos $v_1 = e_3 - e_4$. Entonces $(A - 2\text{Id})v_1 = -e_1 - e_2 - e_3 - e_4 =: v_2 \in N(A - 2\text{Id})$.

Y hay que completar v_2 a una base de $N(A - 2\text{Id}) = \langle e_1, e_2 + e_3 + e_4 \rangle$. Podemos tomar

$v_3 = e_1 \Rightarrow B_1 = (v_1, v_2, v_3) = (e_3 - e_4, -e_1 - e_2 - e_3 - e_4, e_1)$

en $A - 3\text{Id} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (que tiene $\text{rg } 3$) $e_1 + e_4 \mapsto 0 \} B_2 = (\underbrace{e_1 + e_4}_{v_4})$

Sea entonces $B = (B_1, B_2) = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$(A - 2\text{Id})v_1 = v_2 \Rightarrow Av_1 = 2v_1 + v_2$

$(A - 2\text{Id})v_2 = 0$ pues $(A - 2\text{Id})^2 v_1 = 0 \Rightarrow Av_2 = 2v_2$

$v_3 \in N(A - 2\text{Id}) \Rightarrow Av_3 = 2v_3$, y de la misma forma, $v_4 \in N(A - 3\text{Id}) \Rightarrow Av_4 = 3v_4$

$\Rightarrow [f_A]_B = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}$ (y la base se consiguió trabajando con cada bloque por separado)

Bloques de Jordan

Sea $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

$J(\lambda_0, n) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$; $\chi_{J(\lambda_0, n)} = m_{J(\lambda_0, n)} = (\lambda - \lambda_0)^n$

Teorema (Forma de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$)

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces $A \simeq J$ donde J es de la forma

$$J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_r} \end{bmatrix} \quad \text{donde } \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C} \text{ son distintos entre sí y}$$

cada bloque J_{λ_i} es de la forma:

$$J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} J(\lambda_i, m_{i,1}) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_i, m_{i,r_i}) \end{bmatrix} \quad \text{con } m_{i,1} \geq \dots \geq m_{i,r_i} > 0$$

Y A es semejante a un solo J si (solo permutación de bloques).

Demostación (existencia)

Basicamente se trata de demostrar todas las observaciones del ejemplo en general para poder hacer una inducción

Lema 1: Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con $m_A = (\lambda - \lambda_0)^m q(\lambda)$ con $\begin{cases} q(\lambda_0) \neq 0 \\ \text{gr}(q) \geq 1 \end{cases}$

Entonces $\mathbb{C}^n = N((A - \lambda_0 \text{Id}_n)^m) \oplus N(q(A))$

Demostación Como $(\lambda - \lambda_0)^m \perp q(\lambda)$, $\exists s, t \in \mathbb{C}[\lambda]$ t.q.

$$s(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^m + t(\lambda)q(\lambda) = 1. \quad \text{Luego } s(A)(A - \lambda_0 \text{Id})^m + t(A)q(A) = \text{Id}_n$$

y por lo tanto, $\forall x \in \mathbb{C}^n$: $x = \underbrace{s(A)(A - \lambda_0 \text{Id})^m x}_{\in N(q(A))} + \underbrace{t(A)q(A)x}_{\in N((A - \lambda_0 \text{Id})^m)}$

(pues $m_A = (\lambda - \lambda_0)^m q(\lambda) \Rightarrow (A - \lambda_0 \text{Id})^m q(A)x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$)

Así $\mathbb{C}^n = N(q(A)) + N((A - \lambda_0 \text{Id})^m)$

Ahora si $x \in N(q(A)) \cap N((A - \lambda_0 \text{Id})^m) \Rightarrow$

$$q(A)x = 0 \quad \text{y} \quad (A - \lambda_0 \text{Id})^m x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \dots$$

(*)

luego $N(q(A)) \cap N((A - \lambda_0 \text{Id})^m) = \{0\} \Rightarrow \mathbb{C}^n = N(q(A)) \oplus N((A - \lambda_0 \text{Id})^m)$

Lema 2 Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tq $m_A = (\lambda - \lambda_0)^m q(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ con $\begin{cases} q(\lambda_0) \neq 0 \\ \text{gr } q \geq 1 \end{cases}$ (5)

Entonces $N((A - \lambda_0 \text{Id}_n)^m)$ y $N(q(A))$ son A -invariantes

Demostración

$x \in N((A - \lambda_0 \text{Id}_n)^m) \Rightarrow Ax \in N((A - \lambda_0 \text{Id}_n)^m)$ pues

$$(A - \lambda_0 \text{Id}_n)^m Ax = A(A - \lambda_0 \text{Id}_n)^m x = A \cdot 0 = 0$$

(Idem por q)

Lema 3 Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tq $m_A = (\lambda - \lambda_0)^m q(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ con $\begin{cases} \text{gr}(q) \geq 1 \\ q(\lambda_0) \neq 0 \end{cases}$

Sean $f_1 = f_A|_{N((A - \lambda_0 \text{Id}_n)^m)}$ y $f_2 = f_A|_{N(q(A))} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$

Entonces, si B_1 es base de $N((A - \lambda_0 \text{Id}_n)^m)$ y B_2 es base de $N(q(A))$

y $B = (B_1, B_2)$ es base de $\mathbb{C}^n$,

$$[f_A]_B = \left[\begin{array}{c|c} [f_1]_{B_1} & \\ \hline & [f_2]_{B_2} \end{array} \right] \quad \text{y} \quad m_{f_1} = (\lambda - \lambda_0)^m, \quad m_{f_2} = q(\lambda)$$

Demostración Lo de $[f_A]_B$ está claro.

También, como $(A - \lambda_0 \text{Id}_n)^m x = 0, \forall x \in N((A - \lambda_0 \text{Id}_n)^m)$,

está claro que $m_{f_1} \mid (\lambda - \lambda_0)^m$.

De la misma forma $m_{f_2} \mid q(\lambda)$

Pero $m_{f_A} = \text{mcm}(m_{f_1}, m_{f_2}) = (\lambda - \lambda_0)^m q(\lambda) \Rightarrow$

$$m_{f_1} = (\lambda - \lambda_0)^m \quad \text{y} \quad m_{f_2} = q(\lambda)$$

□

Demostración de la existencia de la forma de Jordán

Por inducción en n

$n = 1$: $A = [\lambda_0]$ y no hay nada que probar

$n > 1$: Sea $m_A = (\lambda - \lambda_0)^m q(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$

Si $q(\lambda) = 1$, ya lo demostramos luego del 1º ejemplo

Si $q(\lambda) \geq 1$, entonces sabemos, por los lemas anteriores, que

$$\exists A_1 \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1} \text{ y } A_2 \in \mathbb{C}^{m_2 \times m_2} \text{ tq}$$

$$A \simeq \left[\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline & A_2 \end{array} \right] \text{ con } m_{A_1} = (\lambda - \lambda_0)^m, \quad m_{A_2} = q(\lambda)$$

Pero sabemos $A_1 \simeq J_{\lambda_0}$ y por HI, $m_2 < n \Rightarrow \exists J' \text{ tq } A_2 \simeq J'$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline & A_2 \end{array} \right] \simeq \left[\begin{array}{c|c} J_{\lambda_0} & \\ \hline & J' \end{array} \right] = J$$

Pues si $J_{\lambda_0} = P^{-1} A_1 P$ y $J' = Q^{-1} A_2 Q$, entonces

$$\left[\begin{array}{c|c} J_{\lambda_0} & \\ \hline & J' \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} P^{-1} & \\ \hline & Q^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_1 & \\ \hline & A_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} P & \\ \hline & Q \end{array} \right]$$

Luego por transitividad de $\simeq$, $A \simeq J$ □

Lema Sea $A \in K^{n \times n}$ tq $\chi_A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r} \in \mathbb{C}[\lambda]$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Entonces el tamaño del bloque J_{λ_i} correspondiente al autovalor λ_i en la forma de Jordan J de A es exactamente n_i , la multiplicidad de λ_i como raíz de χ_A .

Para la unicidad de nuevo podemos comparar rangos, notando que

$$A \simeq \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_r} \end{bmatrix}, \text{ entonces al hacer } A - \lambda_i \text{Id}_n, \text{ el \u00fanico}$$

bloque que baja el rango es el bloque J_{λ_i} . Todos los dem\u00e1s

bloques quedan con rango m\u00e1ximo. Luego si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es tq

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r} \in \mathbb{C}[\lambda]$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \text{ con } 1 \leq m_i \leq n_i$$

$$\text{Entonces } \text{rg}((A - \lambda_i \text{Id})^k) = n - n_i + \dots$$

donde ... proviene de la fórmula por matrices nilpotentes

$$\text{rg}(N^k) = c_{k+1} + 2c_{k+2} + \dots + (m-k)c_m; 1 \leq k \leq m$$

luego

$$\text{rg}((A - \lambda_i I_d)^k) = n - m_i + c_{k+1}(\lambda_i) + 2c_{k+2}(\lambda_i) + \dots + (m-k)c_m(\lambda_i)$$

donde $c_j(\lambda_i)$ nota la cantidad de bloques de tamaño j con autovalor λ_i en la diagonal (o sea en J_{λ_i}).

Así inversamente, se obtiene el resultado de unicidad

Teorema (Unicidad de la forma de Jordan)

① Sean $J, J' \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dos matrices en forma de Jordan.

Entonces $J \simeq J' \Rightarrow J = J'$ (salvo orden de bloques)

② Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces la forma de Jordan de A es única

③ Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Entonces $A \simeq B \Leftrightarrow J(A) = J(B)$

Observación final:

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ t.q. $m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$. Entonces en la forma de Jordan de A el blo que corresponde al autovalor λ_i de tamaño máximo que aparece es $J(\lambda_i, m_i)$ (y aparece al menos uno en) para cada i .

Conclusión: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es diagonalizable $\Leftrightarrow m_A = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_r)$
(el minimal tiene todas raíces simples)

($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable si m_A tiene todas sus raíces reales y simples)