Endomorfismos unitarios y Diagonalización

Proposición: Sea $(V, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{C}$-e.v con p.i. de dim. finita n, y sea $f \in End_{\mathbb{C}}(V)$ un endomorfismo unitario.

(1) Sea $\chi_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$ con $\lambda_1, .., \lambda_n \in \mathbb{C}$

Entonces $|\lambda_i| = 1$ para $1 \leq i \leq n$

(2) Si $v \in V$ es autovector de f, entonces $\langle v \rangle$ y $\langle v \rangle^{\perp}$ son ambos f-invariantes

Demostración

(1) Sea v_i autovector de λ_i.
Entonces $\|v_i\|^2 = \|f(v_i)\|^2 = \|\lambda_i v_i\|^2 = |\lambda_i|^2 \|v_i\|^2 \underset{\|v_i\| \neq 0}{\Rightarrow} |\lambda_i| = 1$

(2) Hay que probar que si $w \in \langle v \rangle^{\perp}$, entonces $f(w) \in \langle v \rangle^{\perp}$ también.
Pero $0 = \langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle = \langle \lambda_0 v, f(w) \rangle = \lambda_0 \langle v, f(w) \rangle$
$\Rightarrow \langle v, f(w) \rangle = 0 \Rightarrow f(w) \in \langle v \rangle^{\perp}$
$\lambda_0 \neq 0$ pues $|\lambda_0| = 1$

Esto permite probar inductivamente que sobre $\mathbb{C}$ los endomorfismos unitarios se diagonalizan en una base ortonormal

Teorema Sea $(V, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{C}$-e.v con p.i. de dim finita n, entonces existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tq

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$ donde $\lambda_1, .., \lambda_n \in \mathbb{C}$ satisfacen $|\lambda_i| = 1$.

Demostración (Igual que la demo de endomorfismos autoadjuntos)

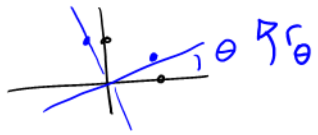
- $n = 1$ $f(x) = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, por ser unitaria
- $n > 1$: Sea $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ autovalor de f y sea $v_1 \in V$, $\|v_1\| = 1$, autovector correspondiente.
  Entonces $\langle v_1 \rangle^{\perp}$ es f-invariante: $f_1 := f|_{\langle v_1 \rangle^{\perp}}$ es un endomorfismo unitario de $\langle v_1 \rangle^{\perp}$ y por HI se diagonaliza en una base ortonormal $(v_2, .., v_n)$ de $\langle v_1 \rangle^{\perp}$
  Luego $\mathcal{B} = (v_1, .., v_n)$ es una base ortonormal que diagonaliza a f ⊠

Consecuencia Autovectores correspondientes a autovalores $\neq$ son ortogonales entre sí?

Endomorfismos ortogonales en espacios euclídeos

Ejemplos

① Rotaciones en $\mathbb{R}^2$



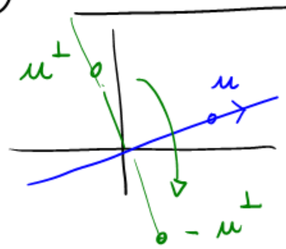
Rotación de ángulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$

$r_\theta \in \operatorname{End}_K(\mathbb{R}^2)$: $r_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta,\ x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$

$$[r_\theta]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \det(r_\theta) = 1$$

Notar que $\forall \mathcal{B}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, $[r_\theta]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

② Simetrías ortogonales en $\mathbb{R}^2$



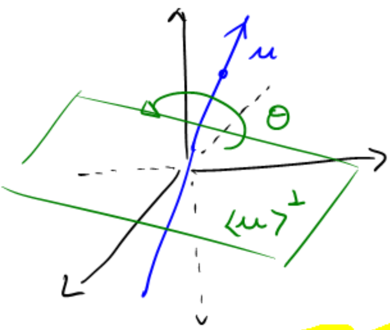
$S_u \in \operatorname{End}_K(\mathbb{R}^2)$: simetría ortogonal c/r a u :

$S_u(u) = u$, $S_u(u^\perp) = u^\perp$

$$[S_u]_{(u, u^\perp)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det(S_u) = -1$$

Veremos enseguida que estos son todos los endomorfismos ortogonales en $\mathbb{R}^2$

③ Rotaciones en $\mathbb{R}^3$ (c/r a un eje de rotación)

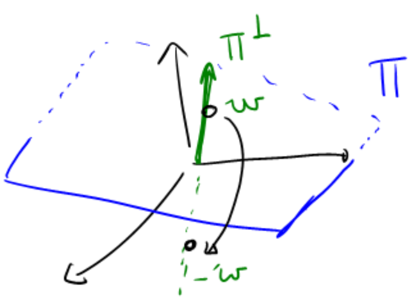


Se rota un ángulo θ alrededor de un eje de rotación u: u se mantiene fijo y la rotación se hace en el plano $\Pi = \langle u \rangle^\perp$

O sea, sea $\mathcal{B} = (u, \underbrace{v, w}_{\text{base de } \langle u \rangle^\perp})$ base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

$$[r]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \det(r) = 1$$

④ Simetrías ortogonales en $\mathbb{R}^3$ (con respecto a un plano $\Pi = \langle u, v \rangle$)



Si $\Pi^\perp = \langle w \rangle$, entonces en la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ se tiene

$$[s]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det(s) = -1$$

Veremos luego que éstas **no** son todas las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$.

¿Cómo hacemos el proceso al revés? Dada $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ endomorfismo ortogonal, demos cuenta de lo que es ...

Estudiemos un poco más el comportamiento de autovalores y autoespacios

Proposición Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclídeo de dim finita y sea $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ un endomorfismo ortogonal.

1. Los únicos autovalores reales de f posibles son 1 y -1
2. Si $\lambda_0 = \pm 1$ es autovalor de f, con autovector v, entonces $\langle v \rangle$ y $\langle v \rangle^\perp$ son f-invariantes
3. Más aún, si S es subespacio de V f-invariante, entonces $S^\perp$ es f-invariante también (vale en $\mathbb{C}$ también)
4. Finalmente, si 1 y -1 son autovalores de f, entonces los autoespacios correspondientes son ortogonales

Demostración

1. En $\mathbb{C}$ vale $|\lambda_0| = 1$. O sea si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 = \pm 1$
2. Es un caso particular del que probamos para $\mathbb{C}$
3. Sea $v \in S$, $w \in S^\perp$: entonces $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle = 0$ es decir $f(w) \perp f(v)$, $\forall v \in S$. Pero al ser f ortogonal y S f-invariante, $f|_S \in End_K(S)$ es ortogonal luego inversible, es decir, $\forall u \in S, \exists v \in S : u = f(v)$: $f(w) \perp u$, $\forall u \in S \Rightarrow f(w) \in S^\perp$.
4. Se puede ver como un caso particular de que las unitarias son diagonalizables. pero aquí también: Sea $v \in Nu(Id - f)$, $w \in Nu(-Id - f)$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \\ \quad \langle v, -w \rangle = -\langle v, w \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow v \perp w.$$

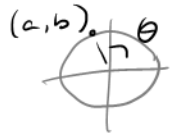
$\boxtimes$

Pero acá, como vimos en los ejemplos anteriores, esto no permite diagonalizar, pues faltan autovalores reales...

Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$

Sea $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ un endomorfismo ortogonal.

$[f]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ con $a^2+b^2=1$ pues los vectores columna forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.



En el 1er caso, $\chi_f(\lambda) = \lambda^2 - 2a + 1$

y en el 2do, $\chi_f(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$

En el 1er caso, sea θ, $0 \le \theta < 2\pi$ tq $a = \cos\theta$, $b = \text{sen}\,\theta$ (existen pues $a^2+b^2=1$)

Luego $[f]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ y f es una rotación de ángulo θ, $\det f = 1$

En el 2do caso, $\langle u \rangle = Nu(Id - f) \perp N(-Id - f) = \langle v \rangle$, y sea $\mathcal{B} = (u, v)$:

$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$: f es una simetría ortogonal de eje u, $\det f = -1$

Transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^3$

Sea $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ ortogonal. Entonces $\chi_f(\lambda)$ tiene al menos 1 raíz real (por ser polinomio en $\mathbb{R}[\lambda]$ de grado impar)

① Caso 1:

1 es raíz de $\chi_f(\lambda)$, sea u autovector correspondiente al 1:

$\langle u \rangle^\perp$ es f-invariante y $f|_{\langle u \rangle^\perp} \in End_{\mathbb{R}}(\langle u \rangle^\perp)$ es ortogonal, $\dim \langle v \rangle^\perp = 2$

luego $f|_{\langle u \rangle^\perp}$ es rotación o simetría, y para $\mathcal{B} = (u, v, w)$ con (v, w) base o.n. de $\langle u \rangle^\perp$:

$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ 0 & -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ o $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\longleftarrow$ $\det(f) = -1$

$\det(f) = 1$ — rotación alrededor del eje u — simetría ortogonal c/r al plano generado por los 2 primeros vectores

② Caso 2

1 no es raíz de $\chi_f(\lambda)$, pero -1 lo es. Sea u autovector correspondiente a -1. Nuevamente $\langle u \rangle^\perp$ es f-invariante, y eligiendo (v, w) base o.n de $\langle u \rangle^\perp$, se tiene para la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$:

$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ó $\cancel{[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$ ← 1 no era autovalor

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\| \\ \text{simetría ortogonal} \\ \text{c/r al plano } \langle v,w\rangle}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\substack{\| \\ \text{rotación alrededor} \\ \text{del eje } \langle u\rangle \\ \text{de ángulo } \theta}}$$

: o sea $f = S \circ r = r \circ S$ también es la composición de una rotación con una simetría.

$\det(f) = -1$

<u>Obs</u>: Si $\det(f) = 1$, f es una rotación alrededor de un eje

Si $\det(f) = -1$, f es o bien una simetría ortogonal c/r a un plano, o bien una composición de una rotación con una simetría.

Clasificación general de transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^n$

Sea $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ un endomorfismo ortogonal. Entonces existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ tq $[f]_{\mathcal{B}}$ tiene la forma siguiente:

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& -1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& -1 && \\ &&&&&& \boxed{}_1 & \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& \boxed{}_k \end{pmatrix}$$

donde para $1 \leq \ell \leq k$,

$$\boxed{}_\ell = \begin{pmatrix} \cos\theta_\ell & -\sin\theta_\ell \\ \sin\theta_\ell & \cos\theta_\ell \end{pmatrix}$$

con $0 < \theta_\ell < 2\pi$, $\theta_\ell \neq \pi$

(eventualmente pueden no aparecer bloques de algún tipo)

<u>Demostración</u> Por inducción en n (Ya lo vimos para $n = 2$ y $n = 3$)

<u>$n = 1$</u>: $f(x) = \pm x$, luego $[f]_{(1)} = [\pm 1]$

Sea $n > 1$:

1. Si 1 o -1 es autovalor de f, con autovector u,

$\langle u\rangle^\perp$ es f-invariante y $f|_{\langle u\rangle^\perp} \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\langle u\rangle^\perp)$ es ortogonal con

$\dim(\langle u\rangle^\perp) = n-1$: Por HI, $[f|_{\langle u\rangle^\perp}]_{\mathcal{B}'}$ tiene la forma indicada para una base ortonormal $\mathcal{B}'$ de $\langle u\rangle^\perp$.

Luego para $\mathcal{B} = (u, \mathcal{B}')$, $[f]_{\mathcal{B}}$ tiene la forma indicada (reordenando a lo mejor la base)

(2) Si ni 1 ni -1 son autovalores de f, entonces $n = 2m$

$\chi_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \overline{\lambda_1}) \cdots (\lambda - \lambda_m)(\lambda - \overline{\lambda_m})$ con $\lambda_i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

donde además $|\lambda_i| = 1$, $1 \le i \le m$, y autovectores complejos correspondientes a autovalores $\neq$ son ortogonales entre sí. En particular, si $v_1 \in \mathbb{C}^n$ es autovector de λ_1, se tiene, dado que f es real:

coordenada a coordenada

$f(\overline{v_1}) = \overline{f(v_1)} = \overline{\lambda_1 v_1} = \overline{\lambda_1}\,\overline{v_1}$, es decir $\overline{v_1}$ es autovector correspondiente a $\overline{\lambda_1}$, pero además $\overline{v_1} \perp v_1$ (o sea $v_1^t \overline{\overline{v_1}} = v_1^t v_1 = 0$)

Se tiene $f|_{\langle v_1, \overline{v_1}\rangle} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{bmatrix}$ con $\lambda_1 = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, ya que $|\lambda_1| = 1$ $(0 < \theta < 2\pi,\ \theta \neq \pi)$

Sean $u_1 = v_1 + \overline{v_1} = 2\operatorname{Re}(v_1)$ y $u_2 = i(v_1 - \overline{v_1}) = -2\operatorname{Im}(v_1)$. Se tiene

- $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$
- $u_1 \perp u_2$ pues $u_1^t u_2 = (v_1 + \overline{v_1})^t \overline{(i(v_1 - \overline{v_1}))} =$
  $= -i\left(v_1^t \overline{v_1} + \overline{v_1}^t \overline{v_1} - v_1^t v_1 - \overline{v_1}^t v_1\right) = -i\left(\|v_1\|^2 + \langle v_1, v_1\rangle - \langle v_1, v_1\rangle - \|\overline{v_1}\|^2\right) = 0$ pues $\|v_1\| = \|\overline{v_1}\|$ y $v_1 \perp \overline{v_1}$.
- $f(u_1) = \lambda_1 v_1 + \overline{\lambda_1}\,\overline{v_1} = 2\operatorname{Re}(\lambda_1 v_1) = 2\cos\theta \operatorname{Re}(v_1) - 2\operatorname{sen}\theta \operatorname{Im}(v_1)$
  $= \cos\theta\, u_1 + \operatorname{sen}\theta\, u_2$

  $f(u_2) = i\lambda_1 v_1 - i\overline{\lambda_1}\,\overline{v_1} = i(2i \operatorname{Im}(\lambda_1 v_1)) = -2(\cos\theta \operatorname{Im} v_1 + \operatorname{sen}\theta \operatorname{Re} v_1)$
  $= -\operatorname{sen}\theta\, u_1 + \cos\theta\, u_2$

Así, si $S = \langle u_1, u_2\rangle$, $f|_S \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(S)$ y en la base ortogonal $\mathcal{B}_S = \{u_1, u_2\rangle$ de S, se escribe $[f_S]_{\mathcal{B}_S} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (y si normalizamos la base también)

Además $S^\perp$ es f-invariante, y luego $f|_{S^\perp} \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(S^\perp)$ es un endomorfismo ortogonal en un espacio de dim. $n-2$, luego por HI existe una base o.n de $\mathcal{B}_{S^\perp}$ tq $[f|_{S^\perp}]_{\mathcal{B}_{S^\perp}}$ tiene la forma requerida

Se concluye tomando la base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$,

$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_S, \mathcal{B}_{S^\perp})$. $\boxtimes$

Comentario: las ortogonales de determinante 1 son las que tienen un número par de "-1", luego bloques $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ = rotaciones de ángulo π.
Las de determinante 1 son las que se llaman rotaciones.

Otra aplicación de la SVD (no lo llegué a dar en clase)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $\det(A) > 0$. Entonces

$$A = U \Sigma V^t$$

donde U, V pueden ser tomados con $\det(U), \det(V) > 0$

U, V^t pueden ser vistas como matrices de rotación

y Σ como una matriz de "escala",

luego A puede ser visto como la composición de una rotación, un escalamiento y otra rotación.

Si se considera en $\mathbb{R}^n$ la esfera S de radio 1, A manda a S a un elipsoide en $\mathbb{R}^n$, y los valores singulares son las longitudes de los semiejes del elipsoide.

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\operatorname{sen} \pi/4 \\ \operatorname{sen} \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \pi/6 & -\operatorname{sen} \pi/6 \\ \operatorname{sen} \pi/6 & \cos \pi/6 \end{pmatrix}$$

Entonces