Transformaciones autoadjuntas

I Subespacios invariantes

Hemos visto antes que si V es un K-e.v, $f \in End_K(V)$, y $\lambda_0 \in K$ es un autovalor de f, entonces $\forall v \in V$ autovector asociado a λ_0, se tiene $f(v) = \lambda_0 v$, lo que implica $f(\langle v \rangle) \subseteq \langle v \rangle$. Este es un ejemplo de subespacio invariante para f, o f-invariante

Definición (Subespacio f-invariante)

Sea V un K-e.v y $f \in End_K(V)$. Se dice que un subespacio $S \subseteq V$ es **invariante por f** o **f-invariante** si se cumple que $f(S) \subseteq S$, i.e $f(v) \in S$, $\forall v \in S$. En ese caso si se restringe f a S, se tiene $f|_S : S \to S$, o sea $f|_S \in End_K(S)$.

Ejemplos: ⓪ V y $\{0_V\}$ son f-invariantes, $\forall f \in End_K(\ )$

① $Nu(f)$, $Im(f)$ son f-invariantes, $\forall f \in End_K(V)$
(pues $f(Nu(f)) = \{0\} \subseteq Nu(f)$ y si $w = f(v) \in Im(f)$, $f(w) \in Im(f)$)

② Si v es un autovector de f asociado al autovalor λ_0, entonces $\langle v \rangle$ es f-invariante. De hecho los únicos subespacios f-invariantes de dimensión 1 son los de la forma $S = \langle v \rangle$ con v autovector de f.

Más adelante veremos una forma de "seguir vectores" para determinar subespacios invariantes. Pero hay algunas propiedades clave de subespacios f-invariantes:

Observación (Matriz en base que contiene a base de subesp. invariante)

Sea V un K-e.v de dim. finita y sea $f \in End_K(V)$.
Sea S un subespacio f-invariante de V, con $\dim(S) \geq 1$.
Sea $\{v_1, .., v_s\}$ base de S y completemos ese conjunto a una base $\mathcal{B} = (v_1, .., v_s, v_{s+1}, .., v_n)$ de V.

Entonces $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \xleftarrow{\ s\ } & \xleftarrow{n-s} \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \begin{matrix} \updownarrow s \\ \updownarrow n-s \end{matrix} \end{array}$ y por lo tanto $\chi_f(\lambda) = \chi_A(\lambda)\,\chi_B(\lambda)$

Además $A=[f|_S]_{\mathcal{B}}$, y por lo tanto $\chi_A(\lambda)=\chi_{f|_S}(\lambda)$

Esto implica que si S es un subespacio f-invariante de V, entonces $\chi_{f|_S}(\lambda) \mid \chi_f(\lambda)$.

Consecuencia

Sea V un K-e.v. de dimensión finita y sea $f\in \mathrm{End}_K(V)$.

Supongamos que S y T son 2 subespacios f-invariantes de V que satisfacen $V=S\oplus T$.

Sea $\mathcal{B}_1$ base de S, $\mathcal{B}_2$ base de T. Luego $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ es base de V y se cumple:

- $$[f]_{\mathcal{B}}=\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} [f|_S]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ \hline 0 & [f|_T]_{\mathcal{B}_2}\end{array}\right]$$
- $$\chi_f(\lambda)=\chi_{f|_S}(\lambda)\cdot\chi_{f|_T}(\lambda)$$

Encontrar subespacios que cumplen esa condición va a permitir hacer demostraciones en forma inductiva...

Transformación adjunta

De ahora en más, $(V,\langle\,,\,\rangle)$ es un K-espacio vectorial con p. interno o sea $K=\mathbb{R}$ y V es un espacio euclídeo, o $K=\mathbb{C}$ y V es un espacio unitario. Además es de dimensión finita.

Sea $\mathbb{R}^n$ con el producto interno $\langle x,y\rangle=x^t\cdot y$ canónico, y sea $f_A\in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ dada por $f_A(x)=Ax$.

Entonces $\forall\, x,y\in\mathbb{R}^n$ se tiene

$$\langle f_A(x),y\rangle=\langle Ax,y\rangle=(Ax)^ty=x^t(A^ty)=\langle x,A^ty\rangle=\langle x,f_{A^t}(y)\rangle$$

Es decir existe $g \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ que satisface que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle f_A(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle \; : \quad \text{Aquí } g = f_{A^t}$$

Veremos que este endomorfismo es único, y se lo llama "f_A adjunta", se nota f_A^*. Aquí $f_A^* = f_{A^t}$

Para $\mathbb{C}^n$ y el producto interno canónico pasa algo análogo:

Sea $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$: $f_A(x) = Ax$

Entonces

$$\langle f_A(x), y \rangle = \langle Ax, y \rangle = (Ax)^t . \overline{y} = x^t . A^t . \overline{y} = x^t . \overline{\overline{A^t} y}$$

$$= \langle x, \overline{A^t}\, y \rangle = \langle x, f_{\overline{A^t}}(y) \rangle$$

Aquí $f_A^* = f_{\overline{A^t}}$

Definición (Matriz adjunta)
Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$: $A^* = \overline{A^t}$ (Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $A^* = A^t$)

Lo anterior se generaliza a $(V, \langle , \rangle)$ e.v. con p.i. de dimensión finita vía las bases ortonormales!

Proposición (transformación adjunta)
Sea $(V, \langle , \rangle)$ un e.v. con p.i. de dimensión finita, y sea $f \in \text{End}(V)$
Entonces existe una única t.q. $f^* \in \text{End}\, V$ que satisface:

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle, \; \forall v, w \in V.$$

(f^* se llama f adjunta)

Demostración:

Existencia: Sea $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base ortonormal de V para $\langle , \rangle$

Entonces sabemos que $\forall v, w \in V$, se tiene

$$\langle v, w \rangle = [v]_{\mathcal{B}}^t \overline{[w]_{\mathcal{B}}}$$ (o sea funciona como el p.i. canónico de $\mathbb{C}^n$)

Luego:

$$\langle f(v), w \rangle = [f(v)]_{\mathcal{B}}^t \overline{[w]_{\mathcal{B}}} = \left([f]_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}\right)^t \overline{[w]_{\mathcal{B}}}$$

Para alivianar la notación, llamemos $A := [f]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Luego
$$\langle f(v), w\rangle = (A\,[v]_{\mathcal{B}})^t \cdot \overline{[w]_{\mathcal{B}}} = [v]^t_{\mathcal{B}} \cdot A^t \cdot \overline{[w]_{\mathcal{B}}} =$$

$$= [v]^t_{\mathcal{B}}\, \overline{A^t\,[w]_{\mathcal{B}}}$$
queremos que $\overline{A^t}$ defina f^* en la base $\mathcal{B}$!

Definamos luego $f^* \in End(V)$ por lo que vale sobre la base ortonormal $\mathcal{B}$ que es lo mismo, por su matriz en la base ortonormal $\mathcal{B}$

Sea f^* la única t.q. que satisface que $[f^*]_{\mathcal{B}} = \overline{A^t}$ $\left(\overset{\shortparallel}{\overline{[f]^t_{\mathcal{B}}}}\right)$

luego $\overline{A^t}\,[w]_{\mathcal{B}} = [f^*]_{\mathcal{B}}\,[w]_{\mathcal{B}} = [f^*(w)]_{\mathcal{B}}$

y se concluye:
$$\langle f(v), w\rangle = [v]^t_{\mathcal{B}}\,\overline{[f^*(w)]_{\mathcal{B}}} = \langle v, f^*(w)\rangle$$

Unicidad: Es una consecuencia de la demostración, ya que se tiene que cumplir esa relación sobre una base ortonormal, luego la matriz de f^* en la base $\mathcal{B}$ queda univocamente determinada. ☒

Para recalcar de la demostración

Si $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V, y $f \in End(V)$, entonces

- $[f^*]_{\mathcal{B}} = \overline{[f]^t_{\mathcal{B}}}$ (caso $K = \mathbb{C}$) (por eso $A^* := \overline{A^t}$)
- $[f^*]_{\mathcal{B}} = [f]^t_{\mathcal{B}}$ (caso $K = \mathbb{R}$)

(En una base ortonormal, la matriz de "f adjunta" es la matriz de f, adjunta)

Transformaciones autoadjuntas

Definición:

① Sea $(V, \langle\,,\rangle)$ un K-e.v con p.i de dim $< \infty$, y sea $f \in End_K(V)$. Si $f^* = f$, se dice que f es autoadjunta.

Es decir, f es autoadjunta $\Leftrightarrow \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle,\ \forall v, w \in V$

equivalentemente, si $\mathcal{B}$ es base ortonormal de V, $\overline{[f]^t_{\mathcal{B}}} = [f]_{\mathcal{B}}$.

(2) Sea $A \in K^{n\times n}$. Se dice que A es autoadjunta si $A^* = A$, es decir $A = A^t$ es simétrica, en el caso $K=\mathbb{R}$ y $A=\overline{A^t}$ es hermitiana, en el caso $K=\mathbb{C}$.

Ejemplos

(1) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, $\chi_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9)$ raíces reales!

$N(3\,Id - A) = \langle (2,1,2) \rangle$, $N(6\,Id-A) = \langle(-2,2,1)\rangle$, $N(9\,Id-A) = \langle (1,2,-2)\rangle$ ortogonales entre sí!

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = D = P^{-1}AP$ con $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

o también $D = U^{-1}AU$ con $U = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\chi_A(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-6)$ ← raíces reales!

$N(3\,Id-A) = \langle (-1,1,0), (-1,0,1)\rangle = \langle (-\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}, 0), (-\frac{\sqrt6}{6}, -\frac{\sqrt6}{6}, \frac{2\sqrt6}{6})\rangle$

buena dimensión y ortogonales entre sí!

$N(6\,Id-A) = \langle (1,1,1)\rangle = \langle (\sqrt3/3, \sqrt3/3, \sqrt3/3)\rangle$

Luego $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = D = P^{-1}AP$ con $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ o tb $D = U^{-1}AU$ con $U = \begin{bmatrix} -\sqrt2/2 & -\sqrt6/6 & \sqrt3/3 \\ \sqrt2/2 & -\sqrt6/6 & \sqrt3/3 \\ 0 & 2\sqrt6/6 & \sqrt3/3 \end{bmatrix}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -i \\ -1 & 2 & -i \\ i & i & 2 \end{bmatrix}$ $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda-3)^2$ ← raíces reales!

$N(A) = \langle (i,i,1)\rangle = \langle (\sqrt3 i/3, \sqrt3 i/3, \sqrt3/3)\rangle$

$N(3\,Id-A) = \langle (-1,1,0), (-i,0,1)\rangle = \langle (-\sqrt2/2, \sqrt2/2, 0), (-\sqrt6 i/6, -\sqrt6 i/6, 2\sqrt6/6)\rangle$

buena dimensión y ortogonales entre sí!

Luego $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D = P^{-1}AP$ con $P = \begin{bmatrix} i & -1 & -i \\ i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pero tb $D = U^{-1}AU$ con

$U = \begin{bmatrix} \sqrt3 i/3 & -\sqrt2/2 & -\sqrt6 i/6 \\ \sqrt3 i/3 & \sqrt2/2 & -\sqrt6 i/6 \\ \sqrt3/3 & 0 & 2\sqrt6/6 \end{bmatrix}$

Todas estas matrices son diagonalizables, con matriz diagonal real, y existe matriz de paso cuyas columnas son base ortonormal en c/caso (se llaman matrices ortogonales en el caso real, y matrices unitarias en el caso complejo) Las estudiaremos un poco más adelante.

Esto vale en general para matrices autoadjuntas (i.e. matrices reales simétricas o complejas hermitianas) y endomorfismos autoadjuntos, como mostraremos a continuación.

Raíces del polinomio característico

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces $\chi_A(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ se factoriza linealmente sobre $\mathbb{C}$ ya que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado.

Es decir $\chi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_n)$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (repetidos o no)

Proposición

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ autoadjunta, es decir tq $\overline{A^t} = A$.

Entonces todas las raíces de $\chi_A(\lambda)$ son reales (y en particular $\chi_A(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$)

Demostración

Sea $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ raíz de $\chi_A(\lambda)$. Probaremos que $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ probando que $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$.

Como λ_0 es autovalor de A (por ser raíz de $\chi_A(\lambda)$), entonces existe $x \in \mathbb{C}^n$ no nulo tq $Ax = \lambda_0 x$.

Luego $(Ax)^t . \overline{x} = (\lambda_0 x)^t . \overline{x} = \lambda_0 x^t . \overline{x} = \lambda_0 \|x\|^2$

$$\| $$

$$x^t A^t \overline{x} = x^t \overline{A}\,\overline{x} = x^t \overline{Ax} = x^t \overline{\lambda_0 x} =$$

$$\boxed{\overline{A^t} = A \Rightarrow A^t = \overline{A}} \qquad = \overline{\lambda_0}\, x^t \overline{x} = \overline{\lambda_0} \|x\|^2$$

Así $\lambda_0 \|x\|^2 = \overline{\lambda_0} \|x\|^2$ y $\|x\| \neq 0$ (pues $x \neq 0$), luego $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$

Corolario

Sea $(V, \langle\, , \rangle)$ un K-e.v con producto interno de dim. finita n (con $K = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$) y sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

Entonces los n autovalores de f (contados con multiplicidad) son todos reales.

Comentario: El polinomio característico de una matriz real simétrica es uno de los pocos ejemplos generales de polinomios que se conocen con todas sus raíces reales!

Subespacios estables

Proposición Sea $(V, \langle , \rangle)$ un K-e.v con p.i de dimensión finita, y sean $f \in End_K(V)$ autoadjunta, y $v \in V$ autovector. Entonces $\langle v \rangle$ y $\langle v \rangle^\perp$ son subespacios f-estables

Demostración Está claro que $\langle v \rangle$ es f-estable pues v es autovector. Sea ahora $w \in \langle v \rangle^\perp$. Probemos que $f(w) \in \langle v \rangle^\perp$. Para ello calculemos $\langle v, f(w) \rangle \underset{f \text{ autoady}}{=} \langle f(v), w \rangle = \langle \lambda_0 v, w \rangle \underset{w \in \langle v \rangle^\perp}{=} 0$ $\boxtimes$

Esto implica que si tomamos como base de V:

$$\mathcal{B} = (v, \underbrace{v_2, \ldots, v_n}_{\text{base de } \langle v \rangle^\perp}), \quad \text{entonces} \quad [f]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right]$$

donde $A = [f|_{\langle v \rangle^\perp}]_{\mathcal{B}}$.

Luego podremos probar inductivamente que f se diagonaliza!

Pero más aún obtendremos una base ortogonal de autovectores en este procedimiento!

Teorema (diagonalización de endomorfismos autoadjuntos)

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un K-e.v. con p.i. de dim. finita, y sea $f \in End_K(V)$ autoadjunta. Entonces existe una base ortonormal de V tq

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{con } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Demostración: Por inducción en $n = \dim(V)$.

- Si $n = 1$, no hay nada que probar: $f(x) = \lambda_0 x \Rightarrow [f]_{(1)} = [\lambda_0]$.
- Sea $n > 1$: Sea $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ un autovalor de f, y sea $v_1 \in V$ autovector de V asociado a λ_1. Entonces, por la prop. anterior, $\langle v_1 \rangle$ y $\langle v_1 \rangle^\perp$ son subespacios suplementarios f-estables. Llamemos f_1 a la restricción de f a $\langle v_1 \rangle^\perp$, i.e. $f_1 := f|_{\langle v_1 \rangle^\perp}$

Se tiene que f_1 es claramente autoadjunta pues f lo es: para $v, w \in \langle v_1 \rangle^\perp$, se tiene $\langle f_1(v), w \rangle = \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle = \langle v, f_1(w) \rangle$

Luego, como $\dim(\langle v_1 \rangle^\perp) = n-1$, por HI $f_1 \in \mathrm{End}_K(\langle v_1 \rangle^\perp)$ se diagonaliza, en una base ortonormal, es decir existe $\mathcal{B}' = (v_2, .., v_n) \subseteq V$ base ortonormal de $\langle v_1 \rangle^\perp$ tq

$$[f_1]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ con } \lambda_2, .., \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Juntando la información, para $\mathcal{B} = (v_1, v_2, .., v_n)$ se tiene

$$[f]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & [f_1]_{\mathcal{B}'} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \boxtimes$$

<u>Comentario</u> Para calcular la base, no se suele proceder inductivamente sino simplemente, si $\chi_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ con $\lambda_1, .., \lambda_r \in \mathbb{R}$ distintos, calcular los autoespacios $\mathrm{Nu}(\lambda_i \mathrm{Id} - f)$, $1 \le i \le r$, que por el teorema tendrán automáticamente la dimensión correcta m_i (pues sabemos que f se diagonaliza) y serán automáticamente ortogonales entre sí (tratando de deducirlo del teorema o sino, mejor, por esta sencilla prueba que vale la pena de todos modos:

sean λ_i, λ_j autovalores distintos y sea $v \in N(\lambda_i \mathrm{Id} - f)$, $w \in N(\lambda_j \mathrm{Id} - f)$, entonces $v \perp w$ pues:

$$\lambda_i \langle v, w \rangle = \langle \lambda_i v, w \rangle = \langle f(v), w \rangle \underset{f \text{ autoadjunta}}{=} \langle v, f(w) \rangle = \langle v, \lambda_j w \rangle \underset{\lambda_j \in \mathbb{R}}{=} \lambda_j \langle v, w \rangle$$

$$\underset{\lambda_i \neq \lambda_j}{\Longrightarrow} \langle v, w \rangle = 0.$$