

Matrices semejantes

Definición: Sean $A, B \in K^{n \times n}$. Se dice que B es **semejante** a A cuando $\exists P \in GL(n, K)$ tq $B = P^{-1} A P$.

$$B \simeq A \Leftrightarrow \exists P \text{ invertible tq } B = P^{-1} A P$$

(también es relación de equivalencia, por ej. $B \simeq A$ y $C \simeq B \Leftrightarrow C = Q^{-1} B Q$ y $B = P^{-1} A P \Rightarrow C = Q^{-1} P^{-1} A P Q = (PQ)^{-1} A (PQ)$)

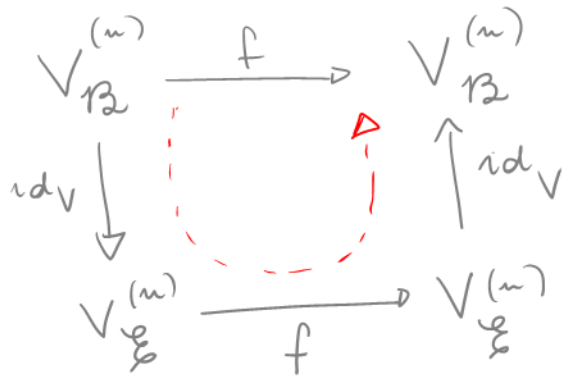
Proposición (Matrices semejantes y endomorfismos en 2 bases)

Sean $A, B \in K^{n \times n}$. Entonces $B \simeq A$ si y solo si representan el mismo endomorfismo $f \in \text{End}_K(V^{(n)})$ en 2 bases, es decir

$\forall V$ K -es de dim n y $\mathcal{B}$ base de V , $\exists f \in \text{End}_K(V)$ y $\mathcal{B}$ base de V

$$\text{tq } A = [f]_{\mathcal{B}} \quad \text{y} \quad B = [f]_{\mathcal{B}}$$

Demostación



$$\begin{aligned} (\Leftarrow) \quad f &= id_V \circ f \circ id_V \Rightarrow [f]_{\mathcal{B}} = \underbrace{[id_V]_{\mathcal{B} \mathcal{B}}}_{C(\mathcal{B}, \mathcal{B})} [f]_{\mathcal{B}} \underbrace{[id_V]_{\mathcal{B} \mathcal{B}}}_{C(\mathcal{B}, \mathcal{B})} \\ &\Rightarrow B = P^{-1} A P \quad C(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = C(\mathcal{B}, \mathcal{B})^{-1} \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Sea $f \in \text{End}_K(V)$ tq $[f]_{\mathcal{B}} = A$, y sea $\mathcal{B}$ base de V tq

$$C(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = I, \text{ entonces } [f]_{\mathcal{B}} = P^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}} P = P^{-1} \cdot A \cdot P = B. \quad \square$$

Observación

$$\bullet A \simeq Id_n \Leftrightarrow A = Id_n$$

$$\bullet A \simeq B \Rightarrow \det(A) = \det(B) \quad \text{y} \quad \tau(A) = \tau(B)$$

$\bullet$ Si $f \in \text{End}_K(V)$ con V de dim. finita, esto permite hablar de $\det(f) := \det([f]_{\mathcal{B}})$ y $\tau(f) := \tau([f]_{\mathcal{B}})$, $\forall \mathcal{B}$ base de V .

Matrices y endomorfismos diagonalizables

(2)

¿qué es más fácil calcular: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$ o $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}^{100}$?

Definición • Sea $A \in K^{n \times n}$. Se dice que A es diagonalizable sobre K si existe $D \in K^{n \times n}$ diagonal (es decir $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$) tq $D \simeq A$ (es decir $\exists P \in GL(n, K)$ tq $D = P^{-1} A P$)

• Sea V un K -e.v. de dim. finita y sea $f \in \text{End}_K(V)$. Se dice que f se diagonaliza sobre K si $\exists B$ base de V tq $[f]_B$ es diagonal (o sea existe $B = (v_1, \dots, v_n)$ base y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$: $[f]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$) es decir $\exists B = (v_1, \dots, v_n)$ base y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tq $f(v_i) = \lambda_i v_i, 1 \leq i \leq n$

Comentario Esto es lo que se generaliza a dimensión ∞ : Sea V un K -e.v. de dimensión arbitraria, y sea $f \in \text{End}_K(V)$. Se dice que f se diagonaliza sobre K si existe una base B de V tal que para cada $v \in B$ existe $\lambda_v \in K$ tq $f(v) = \lambda_v \cdot v$.

Observación Sea V un K -e.v. de dim. finita, y sea $f \in \text{End}_K(V)$.

Entonces f se diagonaliza $\Leftrightarrow [f]_{\mathcal{B}}$ es diagonalizable, $\forall \mathcal{B}$ base de V .

$(\Rightarrow)$ f se diag $\Rightarrow \exists B / [f]_B = D$ diagonal.

$\forall \mathcal{B}$ base de V , $[f]_B = C(B, \mathcal{B})^{-1} [f]_{\mathcal{B}} C(\mathcal{B}, B) \Rightarrow D = P^{-1} [f]_{\mathcal{B}} P$

$(\Leftarrow)$ Sea $\mathcal{B}$ base de V tq $[f]_{\mathcal{B}}$ es diagonalizable, y sea P invertible tq $D = P^{-1} [f]_{\mathcal{B}} P$. Entonces si definimos la base B de V por medio de la matriz de cambio $C(B, \mathcal{B}) = P$, se tiene

$$D = P^{-1} [f]_{\mathcal{B}} P = C(B, \mathcal{B})^{-1} [f]_{\mathcal{B}} C(\mathcal{B}, B) = C(\mathcal{B}, B) [f]_{\mathcal{B}} C(B, \mathcal{B}) = [f]_B$$

Autovalores y autovectores

¿quiénes son los v que forman parte de una base tq $f(v) = \lambda v$ para algún $\lambda \in K$?

Definición (Autovector- Autovalor)

Sea V un K -e.v y sea $f \in \text{End}_K(V)$. Se dice que:

- ① $v \in V$ es un **autovector** de f si $v \neq 0$ y $\exists \lambda \in K$ t.q $f(v) = \lambda v$
 - ② $\lambda_0 \in K$ es un **autovalor** de f si existe $v \in V$, $v \neq 0$, t.q $f(v) = \lambda_0 v$
- v es el autovector asociado al autovalor λ_0 ,
 λ_0 es el autovalor asociado al autovector v .

Para matrices en $K^{n \times n}$, pensando en $f_A: K^n \rightarrow K^n: f_A(x) = Ax$

- ①' $x \in K^n$ es un **autovector** de A si $x \neq 0$ y $\exists \lambda \in K$ t.q $Ax = \lambda x$
- ②' $\lambda_0 \in K$ es un **autovalor** de A si existe $x \in K^n$, $x \neq 0$, t.q $Ax = \lambda_0 x$

Paso a coordenadas: $f(v) = \lambda v \iff [f]_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = \lambda [v]_{\mathcal{B}}$

Entonces: Sean $f \in \text{End}_K(V)$, $A \in K^{n \times n}$:

- f se diagonaliza s/ $K \iff V$ tiene una base de autovectores de f
- A es diagonalizable s/ $K \iff K^n$ tiene una base de autovectores de A .

Ejemplo Sean $f \in \text{End}_K(V)$, $A \in K^{n \times n}$:

- 0 es autovalor de $f \iff \text{Nu}(f) \neq \{0_V\}$
- 0 es autovalor de $A \iff N(A) \neq \{0\} \iff \text{rg}(A) < n \iff \det(A) = 0$

Observemos que $\lambda_0 \in K$ es autovalor de $f \iff \exists v \in V, v \neq 0$, t.q $f(v) = \lambda_0 v$,
i.e. $(\underbrace{\lambda_0 \text{Id} - f}_{\in \text{End}_K(V)})(v) = 0 \iff \text{Nu}(\lambda_0 \text{Id} - f) \neq \{0_V\}$
(y todo $v \in \text{Nu}(\lambda_0 \text{Id} - f)$, $v \neq 0$, es autovector asociado a λ_0)

Del mismo modo, $\lambda_0 \in K$ es autovalor de $A \iff \exists x \in K^n, x \neq 0$, t.q $Ax = \lambda_0 x$,
i.e. $(\lambda_0 \text{Id}_n - A)x = 0 \iff N(\lambda_0 \text{Id}_n - A) \neq \{0\} \iff \det(\lambda_0 \text{Id}_n - A) = 0$

Luego: $\lambda_0 \in K$ es autovalor de $A \iff \det(\lambda_0 \text{Id}_n - A) = 0$

(Observemos que esto es compatible $[\lambda_0 \text{Id} - f]_{\mathcal{B}} = \lambda_0 \text{Id}_n - [f]_{\mathcal{B}}$)

Definición Sea $A \in K^{n \times n}$. El **polinomio característico** de A es

el polinomio $\chi_A(\lambda) := \det(\lambda \text{Id}_n - A) \in K[\lambda]$

Observación: ① Si $A \in K^{n \times n}$, $\chi_A(\lambda) \in K[\lambda]$ es un polinomio mónico de grado n ④

① Sean $A, B \in K^{n \times n}$ t.q. $A \simeq B$. Entonces $\chi_A = \chi_B$

pues si $B = P^{-1}AP$, entonces $\det(\lambda \text{Id}_n - B) = \det(\lambda \text{Id}_n - P^{-1}AP)$
 $= \det(P^{-1} \lambda \text{Id}_n P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda \text{Id}_n - A)P) = \det(\lambda \text{Id}_n - A)$

② Sea V un K -e.v. de dim finita, $f \in \text{End}_K(V)$ y $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ dos bases de V . Entonces $\chi_{[f]_{\mathcal{B}}} = \chi_{[f]_{\mathcal{C}}}$ (pues $[f]_{\mathcal{B}} \simeq [f]_{\mathcal{C}}$)

Esto permite hablar del polinomio característico de f :

Definición Sea V un K -e.v. de dim. finita, y sea $f \in \text{End}_K(V)$.

Entonces el **polinomio característico de f** es el polinomio de $K[\lambda]$:

$$\chi_f(\lambda) = \chi_{[f]_{\mathcal{B}}}(\lambda), \quad \forall \mathcal{B} \text{ base de } V$$

y por lo tanto si $\dim(V) = n$, $\chi_f(\lambda) \in K[\lambda]$ es un polinomio mónico de grado n

Consecuencia: V K -e.v. de dim n , $A \in K^{n \times n}$

$\lambda_0 \in K$ es autovector de A (resp. de f) $\Leftrightarrow \lambda_0$ es raíz del polinomio característico $\chi_A(\lambda)$ (resp. $\chi_f(\lambda)$)

Por lo tanto A (resp f) tiene a lo sumo n autovalores $\neq$ en K

Ejemplos

① $f(x, y) = (3y, 3x)$ $A = [f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -3 \\ -3 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$; 3 y -3 son autovalores de A , con autovectores (por ej):

$N(3 \text{Id} - A) = N \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \langle (1, 1) \rangle$: $(1, 1)$ es autovector para 3

$N(-3 \text{Id} - A) = N \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \langle (-1, 1) \rangle$: $(-1, 1)$ es autovector para -3

y son li, luego base li para $\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 1))$ se tiene

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = [f]_{\mathcal{B}} = C(\mathcal{B}, \mathcal{B})^{-1} [f]_{\mathcal{B}} C(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

② Obs: Si $A \in K^{2 \times 2}$, $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$

En general: $\chi_A(\lambda) = \lambda^n - \text{tr}(A)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$

③ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$: 2 es autovalor "doble"
 pero $N(2\text{Id} - A) = N\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0, 1) \rangle$: No hay base de autovectores
 Otra brma: Como 2 es el único autovalor, tendrá que ser
 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ pero la única matriz semejante a $k\text{Id}_n$ es $k\text{Id}_n$!

④ $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 9$:
 En $\mathbb{R}$ no hay autovalores, luego A no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$
 (i.e. $\nexists P \in GL(2, \mathbb{R}) / P^{-1}AP$ es diagonal)
 Pero en $\mathbb{C}$, $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3i)(\lambda + 3i)$: autovalores $3i$ y $-3i$ con
 autovectores asociados:

$$N\begin{pmatrix} 3i & 3 \\ -3 & 3i \end{pmatrix} = \langle (1, -i) \rangle \text{ y } N\begin{pmatrix} -3i & 3 \\ -3 & -3i \end{pmatrix} = \langle (1, i) \rangle$$

Luego A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$: $\begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$

⑤ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

Con autovectores asociados $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(1, 1, 1)$ que forman base
 de $\mathbb{R}^3$, luego $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

⑥ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$: 1 solo autovalor real $\lambda_1 = 1$ y
 $N(1\text{Id} - A) = N\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1, 0, 0) \rangle$: No hay base de
 autovectores sobre $\mathbb{R}$.

Sobre $\mathbb{C}$: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$ con autovectores $(1, 0, 0)$ para $\lambda_1 = 1$,
 $(0, 1, i)$ para $\lambda_2 = i$ y $(0, 1, -i)$ para $\lambda_3 = -i$, que forman base de $\mathbb{C}^3$ con
 C-e.v. Luego A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

⑦ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ $\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -1 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda - 5)$:

Autovalores: 0 (doble) y 5:

$$N(A) = \langle (1, -1, 1) \rangle \text{ y } N(5\text{Id} - A) = \langle (3, 2, 8) \rangle$$

Luego A no es diagonalizable ni sobre $\mathbb{R}$ ni sobre $\mathbb{C}$ ni en ningún lado