

Resumen

- El determinante $\det: K^{n \times n} \rightarrow K$ es la única función multilinear alternada (en filas) que satisface que $\det(\text{Id}_n) = 1$
- Toda otra función multilinear alternada $f: K^{n \times n} \rightarrow K$ es de la forma $f(A) = \alpha \cdot \det(A)$ donde $\alpha = f(\text{Id}_n) \in K$ (eso porque hay una única función multilinear alternada f $f(\text{Id}_n) = \alpha$ y $f = \alpha \cdot \det$ cumple)
- Determinante en $\mathbb{R}^{n \times n}$ y Volumen (Paralelepípedo $(A_1, \dots, A_n)$):

$$\text{Vol}(P) = |\det(A)|$$

Fórmula de Leibniz (Gottfried Leibniz, 1646-1716)

Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \text{ permutación de } \{1, \dots, n\}} \text{sg}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

donde $\text{sg}(\sigma)$ es -1 o 1 a la cantidad de transposiciones que tengo que hacer para llevar la matriz $\begin{bmatrix} a_{1\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{n\sigma(n)} \end{bmatrix}$ a la matriz Identidad (Se puede probar que esa cantidad es siempre o bien par o bien impar, no importa el camino elegido)

Expansión de Laplace (Pierre Simon Laplace, 1749-1827)

Desarrollo por 1er columna:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A(i|1))$$

vale también, de la misma forma que se demostró que Γ era m.a:

Desarrollo por columna j:

$$\forall j, 1 \leq j \leq n, \text{ se tiene } \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j))$$

La fórmula de Laplace general da un desarrollo del determinante en bloques de tamaño k y $(n-k)$. Investigar.

Determinante del producto (Augustin-Louis Cauchy, 1787-1857) (2)

Proposición: Sean $A, B \in K^{n \times n}$. Entonces

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Demostación: Dado $B \in K^{n \times n}$, puedo definir $f: K^{n \times n} \rightarrow K$ por

$$f(A) = \det(AB) = \det \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_n B \end{pmatrix}$$

Esta función es multilineal y alternada pues si

$$A_i = A'_i + A''_i, \text{ entonces } A_i B = A'_i B + A''_i B$$

$$\text{y si } A_i = A_j, \text{ entonces } A_i B = A_j B$$

Además $f(\text{Id}_n) = \det(B)$. Luego $f = \alpha \cdot \det$ donde

$$\alpha = f(\text{Id}_n) = \det(B). \text{ Por lo tanto } f(A) = \det(A) \det(B). \quad \square$$

Consecuencias: ① $\det(AB) = \det(BA), \forall A, B \in K^{n \times n}$

$$\textcircled{1} \quad A \text{ invertible en } K^{n \times n} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \text{ en } K$$

$$\text{En ese caso } \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

$$(\Rightarrow) \quad A \cdot A^{-1} = \text{Id}_n \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det(\text{Id}_n) = 1$$

$$\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$$
$$(\text{y } \det(A^{-1}) = 1/\det(A))$$

$$(\Leftarrow) \quad A \text{ no invertible} \Rightarrow \text{rg}(A) < n \Rightarrow \text{las filas de } A \text{ son l.d.}$$
$$\Rightarrow \det(A) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad B = P^{-1}AP \text{ con } P \text{ invertible} \Rightarrow \det(A) = \det(B) \quad \text{Heculo -}$$

Comentario: La fórmula de Binet-Cauchy generaliza la fórmula
(Jacques Binet, 1786-1856)

del producto a productos de matrices no cuadradas:

$$\begin{matrix} m & n \\ \boxed{A} & \boxed{B} \end{matrix} = \begin{matrix} n \\ \boxed{AB} \end{matrix} \quad \text{pero en este caso } AB \text{ no es invertible}$$

pues $\text{rg}(AB) \leq m < n$, luego $\det(AB) = 0$

Pero

$$\begin{matrix} m & m \\ \boxed{A} & \boxed{B} \end{matrix} = \begin{matrix} m \\ \boxed{AB} \end{matrix} \quad ; \quad \det(AB) = \sum_k \det(A_k) \det(B_k) \quad \text{donde}$$

A_k nota la submatriz de A obtenida eligiendo

m columnas de A , B_k la submatriz de B eligiendo las mismas k filas, y k recorre todas las posibles elecciones de m columnas en A (Investigarlo)

Determinante de la transpuesta

(3)

Proposición Sea $A \in K^{n \times n}$. Entonces $\det(A^t) = \det(A)$

Demostración: Por inducción en n gracias al desarrollo de Laplace y la demostración de la unicidad del determinante:

$n=1$: $\det(a^t) = a = \det(a) \checkmark$

$n > 1$: En la demo de la unicidad del determinante, probemos el desarrollo por la primera fila: para toda matriz A .

$\otimes \quad \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A(1|j)) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A(1|j)^t)$

Por el desarrollo de Laplace en la 1^{ra} columna:

$$\begin{aligned} \det(A^t) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} A_{i1}^t \det(A^t(i|1)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} A_{i1}^t \det((A^t(i|1))^t) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} a_{1i} \det(A(1|i)) = \det(A) \quad \otimes \end{aligned}$$

Consecuencia Todo lo que vale para filas vale para columnas.

El determinante es una función multilineal alternada en columnas, intercambiar 2 columnas cambia el signo, si las columnas son la da 0, desarrollo por fila i :

$\forall i, 1 \leq i \leq n$: $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j))$

Otras propiedades (en la práctica)

• $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$

• $A = \begin{pmatrix} \overleftarrow{B} & \overleftarrow{D} \\ \overrightarrow{0} & \overrightarrow{C} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \det(B) \det(C)$

(y se generaliza a n bloques cuadrados)

• el determinante de la matriz de **Van der Monde**

(Alexandre Théophile Vandermonde, 1735-1796)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & \cdots & k_n \\ \vdots & & \vdots \\ k_1^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (k_j - k_i) \quad \text{Consecuencias?}$$

Los factores y adjunta de una matriz

(4)

Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, vimos que podemos desarrollar por una fila i cualquiera:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j))$$

Definamos $c_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A(i|j))$

y $\text{Cof}(A) = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matriz de cofactores de A

Se tiene: $\sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij} = \det(A)$

y vale $\sum_{j=1}^n a_{kj} c_{ij} = 0$ para $k \neq i$:

pues si B es la matriz A pero donde se reemplaza la fila i de A por la fila k de A , B tiene 2 filas iguales y por lo tanto, desarrollando por fila i , como $b_{ij} = a_{kj}$ y $B(i|j) = A(i|j)$, entonces

$$0 = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_{ij} \det(B(i|j)) = \sum_{j=1}^n a_{kj} c_{ij}$$

Consideremos lo que se llama la **matriz adjunta de A**

$$\text{Adj}(A) := \text{Cof}(A)^t = (c_{ji})_{1 \leq i, j \leq n} = ((-1)^{j+i} \det(A(j|i)))_{1 \leq i, j \leq n}$$

Entonces

$$(A \cdot \text{Adj}(A))_{ki} = \sum_{j=1}^n a_{kj} (\text{Adj}(A))_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{kj} c_{ij} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } k=i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

tenemos probado:

Proposición

$$A \cdot \text{Adj}(A) = \det(A) \cdot \text{Id}_n$$

Luego A invertible $\Leftrightarrow \text{Adj}(A)$ invertible.

En ese caso también vale $\text{Adj}(A) \cdot A = \det(A) \text{Id}_n$

y $A^{-1} = \text{Adj}(A) / \det(A)$; $(\text{Adj}(A))^{-1} = A / \det(A)$.

Ejercicios: Probar que $\text{Adj}(A^t) = \text{Adj}(A)^t$ y que

también vale $\text{Adj}(A) \cdot A = \det(A) \text{Id}_n$ aunque A no invertible

Regla de Cramer (Gabriel Cramer, 1704-1752 (1750); Colin MacLaurin, 1748) (5)

Sea $A \in K^{n \times n}$ invertible. Entonces $\forall b \in K^n$, la única solución del sistema lineal $Ax = b$ es

$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{ donde } x_j = \frac{\det(A_b^{(j)})}{\det(A)}$$

donde $A_b^{(j)}$ es la matriz que se obtiene reemplazando la columna j de A por b

Demostación $Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b \Leftrightarrow x = \frac{\text{Adj}(A) \cdot b}{\det(A)}$

¿quién es $\text{Adj}(A) \cdot b$?

$$(\text{Adj}(A) \cdot b)_j = \sum_{i=1}^n \text{Adj}(A)_{ji} b_i = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \det(A(i|j)) b_i$$

$A(i|j) = A_b^{(j)}(i|j)$ columna j de $A_b^{(j)}$

luego este es el desarrollo por columna j del determinante de $A_b^{(j)}$

Es decir $x = \frac{\det(A_b^{(j)})}{\det(A)}$ □

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ invertible, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Entonces $Ax = b \Leftrightarrow$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{\det(A)}$$

Comentario

Estos resultados como $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)}$ o la regla de Cramer para

resolver sistemas con única solución tienen mucha importancia teórica ya que permiten demostrar resultados interesantes, aunque no se usan en general para resolver efectivamente casos concretos.

Rango y Menores

Definición (menor)

Sea $A \in K^{m \times n}$. Un **menor de orden r** de A es el determinante de una submatriz de A de tamaño $r \times r$ (o sea de una matriz que se obtiene en la intersección de r filas y r columnas)

Por ejemplo si $A \in K^{2 \times 3}$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, entonces A tiene

3 menores de orden 2: $M_1 = \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $M_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$, $M_3 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Proposición:

Sea $A \in K^{m \times n}$. Entonces

- ① $\text{rg}(A) = r \Rightarrow A$ tiene algún menor de orden r no nulo
- ② A tiene algún menor de orden s no nulo $\Rightarrow \text{rg}(A) \geq s$
- ③ Si todos los menores de orden r de A son nulos, entonces $\forall s > r$, todos los menores de orden s de A son nulos.

Demostación:

- ① A tiene r filas li. Pongamos por simplicidad que son las 1ras
 $\boxed{A_1} \begin{matrix} \uparrow \\ r \\ \downarrow \end{matrix} \quad \text{rg}(A_1) = r \Rightarrow A_1 \text{ tiene } r \text{ columnas li. Esa submatriz}$

tiene rango r y por lo tanto ese menor es no nulo

- ② A tiene una submatriz B de tamaño $r \times r$ de rango r : Pongamos por simplicidad que es $r \begin{bmatrix} B & \\ & \end{bmatrix}$. Luego $m \begin{bmatrix} B' \\ & \end{bmatrix}$ tiene rango r

(pues las r primeras filas de B' son li pues son las de B)

o sea $\text{rg}(A) \geq \text{rg}(B') = r$

- ③ Por ejemplo por inducción en $s > r$ usando algún desarrollo x columna

Para $s = r+1$, sea B una submatriz de A de tamaño $s \times s$, entonces

$$\det(B) = \sum_{i=1}^s (-1)^{i+1} B_{i1} \underbrace{\det(B(i|1))}_{\text{Menor de A de tamaño } r \times r} = 0, \text{ etc...}$$

Lema $\text{rg}(A) = r \Leftrightarrow A$ tiene algún menor de orden r no nulo y todos los menores de orden $(r+1)$ de A son nulos.