Ejemplos:

1. Hallar $S^\perp$ para $S = \langle (2i, 1, 2), (0, 0, 9i) \rangle \subseteq \mathbb{C}^3$

Se resuelve $\begin{cases} \overline{2i}\, x + y + 2z = 0 \\ \overline{9i}\, z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 2i x \end{cases}$ $\quad S^\perp = \langle (1, 2i, 0) \rangle$

2. $S = \{ x \in \mathbb{C}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \}$ (con $(a_1, .., a_n) \neq 0$)

Entonces $S^\perp = \langle \overline{(a_1, .., a_n)} \rangle$

3. Hallar $S^\perp$ para $S \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ el subesp. de matrices simétricas:

$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow S^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

4. Hallar $\langle 1 \rangle^\perp$ en $\mathbb{R}_3[X]$ para $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$:

Se necesitan 3 pols li en $\mathbb{R}_3[X]$ ortogonales a 1:

$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \Rightarrow \int_0^1 (x^3 - \frac{1}{4})\, dx = 0 \Rightarrow x^3 - \frac{1}{4} \perp 1$

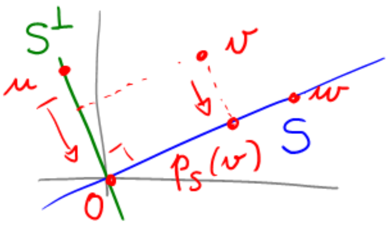
$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{3} \perp 1$ y también $x - \frac{1}{2} \perp 1$

Luego $\langle 1 \rangle^\perp = \langle x^3 - \frac{1}{4}, x^2 - \frac{1}{3}, x - \frac{1}{2} \rangle$

5. Ejercicio: Hallar $S^\perp$ para S el subespacio de fciones pares en $C[-1, 1]$

Proyección ortogonal

V es un K-e.v con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n



$P_S \in \mathrm{End}_K(V)$ es la t.l. definida por

- $P_S(w) = w, \ \forall w \in S$
- $P_S(u) = 0, \ \forall u \in S^\perp$

El endomorfismo P_S se llama la proyección ortogonal de V sobre S

Observaciones:

- P_S está bien definida y es única pues si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_{S^\perp}$ es base de V, donde $\mathcal{B}_S = \{w_1, .., w_s\}$ es base de S y $\mathcal{B}_{S^\perp} = \{u_1, .., u_{n-s}\}$ es base de $S^\perp$, entonces P_S está definida sobre la base por
  $P_S(w_i) = w_i, \ 1 \le i \le s$, y $P_S(u_j) = 0, \ 1 \le j \le n-s$.
- $\mathrm{Im}(P_S) = S, \ \mathrm{Nu}(P_S) = S^\perp$

③ P_S es un proyector pues $P_S(w) = w$, $\forall w \in Im(P_S)$

④ $\forall v \in V$, como $V = S \oplus S^\perp$, existen únicos $w \in S$, $u \in S^\perp$ tq $v = w + u$. Entonces $P_S(v) = w$.

⑤ Si $\mathcal{B} = (w_1, .., w_s, u_1, .., u_{n-s})$ es base ortogonal de V tq $(w_1, .., w_s)$ es base de S, entonces

$$[P_S]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} Id_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \updownarrow s \\ \updownarrow n-s \end{array} \\ \overleftrightarrow{s} \quad \overleftrightarrow{n-s} \end{array}$$

Se tiene $v = \underbrace{P_S(v)}_{\in S} + \underbrace{v - P_S(v)}_{\in S^\perp}$

y $$P_S(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \dots + \frac{\langle v, w_s \rangle}{\|w_s\|^2} w_s$$

y $$v - P_S(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \dots + \frac{\langle v, u_{n-s} \rangle}{\|u_{n-s}\|^2} u_{n-s} = P_{S^\perp}(v) \perp S$$

o sea $v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$, $\forall v \in V$.

Ejemplo:

Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$, hallar P_S.

① Por Gram-Schmidt:

Sabemos que si (w_1, w_2, w_3) es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ tq w_1, w_2 es base ortogonal de S, entonces $P_S(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle v, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$

Luego alcanza con calcular una base ortogonal de S (no importa v_3)

$$S = \langle \underbrace{(1,0,1)}_{w_1 = v_1}, \underbrace{(1,1,0)}_{v_2} \rangle$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

Así, si $v = (x,y,z)$, $$P_S(v) = \frac{x+z}{2}(1,0,1) + \frac{\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z}{3/2}\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2x+y+z}{3}, \frac{x+2y-z}{3}, \frac{x-y+2z}{3}\right).$$

② También es + fácil acá calcular $P_{S^\perp}(v)$: $S^\perp = \langle (1,-1,-1) \rangle$ y $P_{S^\perp}(v) = \frac{x-y-z}{3}(1,-1,-1)$ y luego $P_S(v) = v - P_{S^\perp}(v) = (x,y,z) - \frac{x-y-z}{3}(1,-1,-1)$.

③ También se puede calcular P_S en la base $\mathcal{B} = ((1,1,0), (1,0,1), (1,-1,-1))$

$$[P_S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ luego } [P_S]_{\mathcal{E}} = C(\mathcal{B}, \mathcal{E})\, [P_S]_{\mathcal{B}}\, C(\mathcal{E}, \mathcal{B})$$

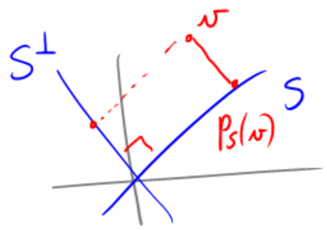
pero ahí hay que calcular $C(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = C(\mathcal{B}, \mathcal{E})^{-1}$.

Proposición: Sea $(V, <,>)$ un K-e.v con p.i. de dimensión finita, y sea S un subespacio de V. Sea $p \in End_K(V)$ un proyector tq $Im(p) = S$. Entonces

$$p = p_S \iff \| p(v) \| \le \| v \| , \quad \forall v \in V$$

Demostración:

$(\Longrightarrow)$

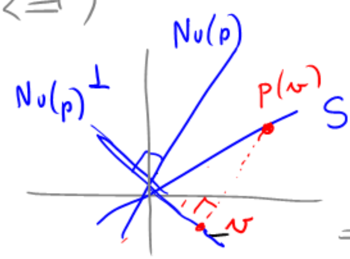


Por Pitágoras:

$$\| v \|^2 = \| p_S(v) \|^2 + \| v - p_S(v) \|^2$$

$$\Longrightarrow \| p_S(v) \|^2 \le \| v \|^2$$

$(\Longleftarrow)$



Probemos que $Nu(p) = S^\perp$, luego $p = P_S$:

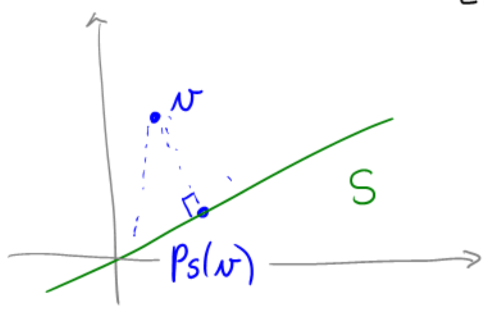
Sea $v \in Nu(p)^\perp$: $\underbrace{v}_{\in Nu(p)^\perp} = \underbrace{p(v)}_{\in S = Im(p)} + \underbrace{(v - p(v))}_{\in Nu(p)} \Longrightarrow p(v) = \underset{Nu(p)^\perp}{v} - \underset{Nu(p)}{(v - p(v))}$

$\overset{P.T.}{\Longrightarrow} \| p(v) \|^2 = \| v \|^2 + \| v - p(v) \|^2$ pero $\| p(v) \| \le \| v \| \Longrightarrow v - p(v) = 0$

$\Longrightarrow v = p(v) \Longrightarrow v \in S \Longrightarrow Nu(p)^\perp \subseteq S \Longrightarrow S^\perp \subseteq Nu(p) \underset{\text{por dimensión}}{\Longrightarrow} Nu(p) = S^\perp$ ⊠

Distancia de un vector a un subespacio

En $\mathbb{R}^2$:



Está claro que $\| v - p_S(v) \| \le \| v - w \| , \forall w \in S$

pues como $v - p_S(v) \perp S$,

$\forall w \in S$ se tiene

$$v - w = \underbrace{v - p_S(v)}_{\perp S} + \underbrace{p_S(v) - w}_{\in S}$$

Luego por Pitágoras: $\| v - w \|^2 = \| v - p_S(v) \|^2 + \underbrace{\| p_S(v) - w \|^2}_{\ge 0}$

$$\Longrightarrow \| v - w \|^2 \ge \| \overbrace{v - p_S(v)}^{P_{S^\perp}(v)} \|^2 , \quad \forall w \in S,$$

i.e. $d(v, p_S(v)) \le d(v, w), \forall w \in S$:

La distancia de v al subespacio S es aquí:

$$d(v, S) := \min \{ d(v, w), w \in S \} = d(v, p_S(v)) = \| v - p_S(v) \| = \| P_{S^\perp}(v) \|$$

Esto mismo ocurre en espacios vectoriales con producto interno de dim. finita:

En general si $S \subseteq V$ es un subespacio y $v \in V$, se define la distancia de v a S como

$$d(v,S) = \inf \{ d(v,w), w \in S \}$$

Se tiene:

Proposición (distancia de un vector a un subespacio en dim. finita)

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un K-e.v con p.i de dimensión finita. Sean S un subespacio de V y $v \in V$. Entonces

$$d(v,S) = d(v, p_S(v)) = \| v - p_S(v) \| = \| p_{S^\perp}(v) \|$$

Luego en este caso el "ínfimo se realiza", o "se alcanza", i.e.

$$d(v,S) = \min \{ d(v,w), w \in S \}$$

Más aún, hay unicidad: $d(v,S) = d(v,w)$ con $w \in S \Rightarrow w = p_S(v)$, y $p_S(v)$ es el vector de S más cercano a v (la mejor aproximación de v en S)

Demostración

Es la misma que la que hicimos para $\mathbb{R}^2$: $\forall w \in S$ se tiene

$$\| v - w \|^2 = \| \underbrace{v - p_S(v)}_{\in S^\perp} \|^2 + \| \underbrace{p_S(v) - w}_{\in S} \|^2$$

Luego $\| v - p_S(v) \| \leq \| v - w \|$, $\forall w \in S \Rightarrow d(v,S) = \| v - p_S(v) \|$

y además $\| v - w \| = d(v,S) \Leftrightarrow p_S(v) - w = 0 \Leftrightarrow w = p_S(v)$.

$\boxtimes$

Ejemplos

(1) Calcular la distancia de $v = (1,0,0)$ a $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0 \}$

$$d(v,S) = \| p_{S^\perp}(v) \| = \left\| \frac{x-y-z}{3} (1,-1,-1) \right\| \underset{(x,y,z)=(1,0,0)}{=} \frac{1}{3} \| (1,-1,-1) \| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) Hallar el polinomio constante más cercano a X^3 en $\mathbb{R}_3[X]$ con $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) \, dx$.

Se trata de encontrar $c \in \langle 1 \rangle$ que realiza $d(X^3, \langle 1 \rangle)$. Este es

$$P_{\langle 1 \rangle}(X^3) = \frac{\langle X^3, 1 \rangle}{\| 1 \|^2} 1 = \frac{1}{4}.$$

Información: Descomposición QR de una matriz.

Se dice que una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal cuando sus columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$

El método de ortogonalización de Gram-Schmidt permite inmediatamente escribir a una matriz $A \in GL(n, \mathbb{R})$ como el producto de una matriz ortogonal Q y una matriz triangular superior R:

$$A = QR$$

Pues si $(\tilde{w}_1, .., \tilde{w}_n)$ es la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ que se obtiene por Gram-Schmidt, se tiene

$$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 \\ \vdots \\ w_n = v_n - \dfrac{\langle v_n, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \dots - \dfrac{\langle v_n, w_{n-1}\rangle}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_1 = r_{11}\tilde{w}_1 \\ v_2 = r_{12}\tilde{w}_1 + r_{22}\tilde{w}_2 \\ \vdots \\ v_n = r_{1n}\tilde{w}_1 + \dots + r_{nn}\tilde{w}_n \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} \tilde{w}_1 & \tilde{w}_2 & \dots & \tilde{w}_n \end{array}\right]}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots 0 & r_{nn} \end{bmatrix}}_{R}$$

Esto es muy útil para aplicaciones numéricas (como verán en ECN)

Observar que como $(\tilde{w}_1, .., \tilde{w}_n)$ es ortonormal se tiene

$$v_1 = \underbrace{\langle v_1, \tilde{w}_1\rangle}_{r_{11}} \tilde{w}_1 \quad , \quad v_2 = \underbrace{\langle v_2, \tilde{w}_1\rangle}_{r_{12}} \tilde{w}_1 + \underbrace{\langle v_2, \tilde{w}_2\rangle}_{r_{22}} \tilde{w}_2 \qquad \text{etc..}$$

Ejercicio (Desigualdad de Bessel)

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un K-e.v con p.i (no necesariamente de dimensión finita) y sea $\{v_1, .., v_s\}$ un cjto ortogonal de vectores no nulos de V.

Probar que para todo $v \in V$ se tiene $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{|\langle v, v_i\rangle|^2}{\|v_i\|^2} \leq \|v\|^2$;