Otros ejemplos (no "canónicos")

① Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y definida positiva (es decir $A_{ji} = A_{ij}, \forall i,j$ y $v^t A v > 0, \ \forall v \in \mathbb{R}^n$ no nulo).

$$\langle v, w \rangle_A := v^t A w = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i A_{ij} y_j \quad \text{si } v = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n, \ w = (y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$(x_1 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \\ a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x_1y_1 + \cdots + a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1 + \cdots + a_{2n}x_2y_n + \cdots + a_{n1}x_ny_1 + \cdots + a_{nn}x_ny_n$$

es un producto interno en $\mathbb{R}^n$:

- $\langle v + v', w \rangle_A = (v+v')^t A w = v^t A w + v'^t A w = \langle v, w\rangle_A + \langle v', w\rangle_A$

  $\langle k v, w \rangle_A = (kv)^t A w = k\, v^t A w = k \langle v, w \rangle_A$
- $\langle w, v \rangle_A = w^t . A v \underset{A \text{ sim}}{=} w^t A^t v = (Aw)^t . v \underset{\mathbb{R}}{=} \left((Aw)^t . v\right)^t = v^t (Aw)^{tt} = v^t A w = \langle v, w \rangle_A$
- $\langle v, v \rangle_A = v^t A v > 0 \quad \forall v \neq 0$ por ser A def positiva

Por ejemplo para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$

Estos ejemplos de producto interno aparecen en física, donde A puede representar una matriz de rigidez cuando se estudian los desplazamientos elásticos de una estructura. ¿Cómo sería en $\mathbb{C}^n$: qué se le pide a A?

② Sea $w : [a,b] \to \mathbb{C}$ una función continua y positiva (i.e. $w(t) > 0, \forall t \in [a,b]$), entonces $(C[a,b], \langle \ , \ \rangle_w)$ es un e.v. con producto interno para

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b w(t) f(t) g(t)\, dt .$$

Matriz de Gram asociada a un producto interno (en dim. finita)

Jorgen Gram 1850-1916

Sea V un K-e.v de dimensión n, con producto interno $\langle \ , \ \rangle$ y sea $\mathcal{B} = (v_1, .., v_n)$ una base de V.

Entonces $\langle \ , \ \rangle$ queda definida por sus valores en $\mathcal{B}$:

Si $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, $w = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$, entonces

$\langle v, w \rangle = \langle x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n, y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n \rangle =$

$$= x_1\bar{y}_1\langle v_1,v_1\rangle + \dots + x_1\bar{y}_n\langle v_1,v_n\rangle + x_2\bar{y}_1\langle v_2,v_1\rangle + \dots$$
$$\dots + x_n\bar{y}_n\langle v_2,v_n\rangle + \dots + x_n\bar{y}_1\langle v_1,v_n\rangle + \dots + x_n\bar{y}_n\langle v_n,v_n\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\bar{y}_j\langle v_i,v_j\rangle = [v]^t_{\mathcal{B}}\, G_{\mathcal{B}}\, \overline{[w]_{\mathcal{B}}}$$

donde $G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \langle v_1,v_n\rangle \\ \vdots & & \\ \langle v_n,v_1\rangle & \cdots & \langle v_n,v_n\rangle \end{bmatrix} \in K^{n\times n}$

Esta matriz se llama Matriz de Gram de $\langle\,,\rangle$ en la base $\mathcal{B}$, y resulta ser una matriz hermitiana (i.e $\overline{G^t_{\mathcal{B}}} = G_{\mathcal{B}}$) y definida positiva (i.e. $x^t G_{\mathcal{B}}\bar{x} > 0 \;\forall x\neq 0$ en K^n)

Propiedades de un producto interno

1. Desigualdad de Cauchy - Bozniakowsky - Schwarz:

Sea $(V,\langle\,,\rangle)$ un K-e.v con producto interno, entonces

$$|\langle v,w\rangle|^2 \leq \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle \qquad \forall v,w\in V$$

Y se tiene $=$ si y solo si un vector es proporcional al otro

Demostración:

A este nivel un truco pero que tendrá un significado geométrico bien preciso, y es motivado por el ejemplo del producto escalar en $\mathbb{R}^2$:

Si $w=0$, $\langle v,w\rangle = 0$ y $\langle w,w\rangle = 0$: $0\leq 0$ ✓

Si $w\neq 0$, puedo considerar $v' = v - \dfrac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$

(Más adelante veremos que $\dfrac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$ es la componente de v en la dirección de w)

Así $0\leq \langle v',v'\rangle = \left\langle v - \dfrac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w,\; v - \dfrac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w\right\rangle$

$$= \langle v,v\rangle - \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}\langle w,v\rangle - \frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{\langle w,w\rangle}\langle v,w\rangle + \frac{\langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle}}{\langle w,w\rangle^2}\langle w,w\rangle$$

$$= \frac{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle\overline{\langle v,w\rangle}}{\langle w,w\rangle} = \frac{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - |\langle v,w\rangle|^2}{\langle w,w\rangle}$$

Como $\langle w,w\rangle > 0$, queda $0\leq \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - |\langle v,w\rangle|^2$, i.e $|\langle v,w\rangle|^2 \leq \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle$ ☒

Norma: Sea $(V, \langle\, , \rangle)$ un K-e.v. con p.i.

$\forall v \in V$, puedo definir la **norma** de V como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

que satisface por definición del producto escalar

① $\forall v \in V : \|v\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, y $\forall v \in V, v \neq 0 : \|v\| \in \mathbb{R}_{>0}$

② $\|kv\| = |k|\,\|v\|, \ \forall k \in K, v \in V$

(pues $\|kv\|^2 = \langle kv, kv \rangle = k\bar{k}\,\langle v, v\rangle = |k|^2\,\|v\|^2$)

La desigualdad de C-B-S es entonces: $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|, \forall v, w \in V$

Y esto implica la

② **Desigualdad Triangular:** $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \ \forall v, w \in V$

Demostración:

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \iff \|v+w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2 \quad \text{¿por qué?}$$

$$\text{Pero } \|v+w\|^2 \underset{def}{=} \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle w,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle$$

$$= \|v\|^2 + \overline{\langle v,w\rangle} + \langle v,w\rangle + \|w\|^2 = \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \leq$$

$$\leq \|v\|^2 + 2|\mathrm{Re}\,\langle v,w\rangle| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2$$

$$(z = a+bi \Rightarrow |a| \leq \sqrt{a^2+b^2})$$

$$\underset{C-B-S}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\|\ \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|^2) \qquad \boxtimes$$

Luego la norma de un vector da una noción del tamaño del vector, de cuánto mide. En general una norma en un K-e.v. V es una función $\|\ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface

① $\|v\| > 0, \ \forall v \neq 0$

② $\|kv\| = |k|\,\|v\|, \ \forall k \in K, v \in V$

③ $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \ \forall v, w \in V$

$\|(1, -i, i)\| = \sqrt{3}$ por ejemplo

Todo espacio $(V, \langle\, , \rangle)$ con producto interno da una norma, aunque se pueden definir normas que no provienen de un producto interno (se verán ejemplos, que son ejemplos importantes). Esos espacios se llaman normados.

Comentario $(\sum x_i y_i)^2 \leq (\sum x_i^2)(\sum y_i^2)$ para $x, y \in \mathbb{R}^n$: Cauchy

$$\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$$ Schwarz (Bozniakowsky)

Distancia

La norma permite definir la **distancia** entre vectores:

$$d(v,w) = \|v-w\| \,, \quad \forall v,w \in V$$

que satisface:

① $d(v,w) \geq 0$, $\forall v,w \in V$, y $d(v,w)=0 \iff v=w$

② $d(v,w) = d(w,v)$, $\forall v,w \in V$

③ $d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w)$, $\forall u,v,w \in V$.

En general una distancia es una función de $V \times V$ en $\mathbb{R}$ que satisface estas 3 propiedades. Así como hay normas que no provienen de productos internos, hay distancias que no provienen de normas.- (Aquí solo trabajaremos con distancias que vienen de normas y normas que vienen de productos internos)

Angulo entre vectores ($K = \mathbb{R}$)

En el caso de un espacio vectorial real con producto interno $(V_{\mathbb{R}}, \langle , \rangle)$, o sea un espacio euclídeo, como $\langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$, para vectores $v, w \neq 0$, la desigualdad de C-B-S es

$$-1 \leq \frac{|\langle v,w\rangle|}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1$$

y permite definir el ángulo entre v y w como el único ángulo θ con $0 \leq \theta \leq \pi$ que satisface $\cos\theta = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$.

Observación - Definición

Si $v \in (V, \langle , \rangle)$, se dice que v es un vector **unitario** si $\|v\| = 1$. En general, $\forall v \in V$, $v \neq 0$, se tiene que

$\dfrac{v}{\|v\|}$ es unitario (pues $\left\| \dfrac{v}{\|v\|} \right\| = \left| \dfrac{1}{\|v\|} \right| \|v\| = 1$)

Ortogonalidad

Definición (ortogonalidad) Sea $(V, \langle , \rangle)$ un K-e.v. con p.i.

Sean $v, w \in V$. Se dice que v es ortogonal a w si y sólo si $\langle v, w \rangle = 0$. Notación: $v \perp w$

$$v \perp w \underset{\text{def}}{\iff} \langle v, w \rangle = 0$$

Observaciones:

① En el caso euclídeo, $\forall v, w \neq 0$: $v \perp w \iff \cos\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$ son perpendiculares

② $v \perp w \iff w \perp v$

pues $\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle} = \overline{0}$ si $\langle v, w \rangle = 0$

③ $0_V \perp v, \ \forall v \in V$ pues $\langle 0_V, v \rangle = \langle 0 . w, v \rangle = 0 \langle w, v \rangle = 0$

④ $v \perp w \implies \alpha v \perp \beta w, \ \forall \alpha, \beta \in K$

⑤ Teorema de Pitágoras:

$$v \perp w \implies \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

pues $\langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle$

Ejemplos

① $(1, i, 0) \perp (-1, i, 1)$ pues $1 . \overline{-1} + i . \overline{i} + 0 . \overline{1} = -1 - i^2 = 0$

② $\operatorname{sen} x \perp \cos x$ con $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$

pues $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} dx = -\frac{\cos 2x}{4}\Big]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\cos 2\pi}{4} + \frac{\cos -2\pi}{4} = 0$

③ Calcular en $\mathbb{R}^{n \times n}$ todas las matrices ortogonales a $B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$ con

$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$: $AB^t = \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & & n a_{1n} \\ a_{n1} & 2a_{n2} & & n a_{nn} \end{pmatrix}$

$\operatorname{tr}(AB^t) = 0 \iff a_{11} + 2a_{22} + \cdots + n a_{nn} = 0$

luego son las matrices A tq $a_{11} = -2a_{22} - \cdots - n a_{nn}$

i.e. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \ddots \\ & & & n \end{pmatrix}^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, E^{ij}, \forall i \neq j \right\rangle$

④ Hallar en $\mathbb{R}_2[X]$ todos los polinomios ortogonales a x con $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) Q(x)\, dx$

$p = ax^2 + bx + c$ $\quad \langle p, x \rangle = 0 \iff \int_{-1}^{1} (ax^3 + bx^2 + cx)\, dx = 0$

$\iff \left[a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = 0 \iff 2\frac{b}{3} = 0$: $\quad x^{\perp} = \langle x^2, 1 \rangle$.