Observación: Todo K-ev de dim n "es como" K^n

Sea V un K-e.v de dim n. Entonces $V \cong K^n$ (fijando $\mathcal{B}$ base de V: $v \overset{\cong}{\longmapsto} [v]_{\mathcal{B}}$)

es isomorfo

Proposición (t.l y mono/epi/iso)

Sea V, W K-e.v's, sea $f: V \to W$ t.l y sea $\mathcal{B}$ base de V. Entonces

1. f es mono $\iff$ $f(\mathcal{B})$ es un cjto l.i
2. f es epi $\iff$ $f(\mathcal{B})$ es un cjto de generadores de W
3. f es iso $\iff$ $f(\mathcal{B})$ es base de W

Demostración

Probaremos sólo 1 ya que 2 fue probado ya para el caso de $\mathcal{B}$ cjto de generadores de V y 3 es consecuencia inmediata de 1 y 2

1 ($\Rightarrow$) q.p.q $f(\mathcal{B})$ l.i: Sean $f(v_1), .., f(v_s) \in f(\mathcal{B})$, o sea $v_1, .., v_s \in \mathcal{B}$, t.q $k_1 f(v_1) + .. + k_s f(v_s) = 0$. Luego $f(k_1 v_1 + .. + k_s v_s) = 0$, o sea $k_1 v_1 + .. + k_s v_s \in Nu(f) = \{0_V\}$ por ser f mono por hipótesis.

Ahora bien, $\{v_1, .., v_s\}$ l.i, por ser parte de una base, implica $k_1 = .. = k_s = 0$

O sea $\{f(v_1), .., f(v_s)\}$ es l.i como se quería probar

($\Leftarrow$) Sea $v \in Nu(f)$, queremos probar que $v = 0$: $\exists\, v_1, .., v_r \in \mathcal{B}$ / $v = k_1 v_1 + .. + k_r v_r$. Luego $0 = f(v) = k_1 f(v_1) + .. + k_r f(v_r)$ (pues $v \in Nu(f)$). Pero $\{f(v_1), .., f(v_r)\}$ l.i por hipótesis $\Rightarrow$ $k_1 = \dots = k_r = 0$. O sea $v = 0$ como se quería probar. ☒

Corolario: Sean V, W K-e.v's y $f: V \to W$ t.l.

1. f mono $\Rightarrow$ f(cjto l.i de V) es cjto l.i de W

   f mono $\Rightarrow$ $\dim_K(V) \leq \dim_K(W)$ ¿Por qué? ¿vale la vuelta?
2. f epi $\Rightarrow$ $\dim_K(V) \geq \dim_K(W)$ ¿Por qué? ¿vale la vuelta?
3. f iso $\Rightarrow$ $\dim_K(V) = \dim_K(W)$.

Ejemplos

- ¿Tiene sentido entonces buscar un monomorfismo de K^5 en K^7?
- ¿O un epi de $\mathbb{R}^{3\times 2}$ en $\mathbb{R}^7$?
- ¿$\exists\, f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.l : $Nu(f) = \langle (0,1,1), (1,0,1) \rangle$ e $Im(f) = \langle (0,1,1), (1,0,1) \rangle$

Como $(0,1,1)$ y $(1,0,1)$ son l.i, los podemos completar a una base, por ejplo agregando el vector $(1,0,0)$, luego para cualquier $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.l. ②

se tendrá $Im(f) = \langle f(0,1,1), f(1,0,1), f(1,0,0) \rangle = \langle f(1,0,0) \rangle$

y por lo tanto $\dim_K(Im(f)) \leq 1$. Nunca podrá ser $\dim(Im(f)) = 2$!!

• ¿ Existirá $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ t.l. tq $Nu(f) = \langle (0,1,1,0), (1,0,1,0) \rangle$ e $Im(f) = \langle (0,1,1,0), (1,0,1,0) \rangle$?

Aquí parece no haber impedimento: Completando $\overbrace{(0,1,1,0)}^{v_1}$ y $\underbrace{(1,0,1,0)}_{v_2}$ a una base de $\mathbb{R}^4$ con por ejplo $\underbrace{(1,0,0,0)}_{v_3}$ y $\underbrace{(0,0,0,1)}_{v_4}$, uno puede definir la t.l. f por ejemplo por las condiciones

$f(v_1) = (0,0,0,0)$, $f(v_2) = (0,0,0,0)$, $f(v_3) = (0,1,1,0)$, $f(v_4) = (1,0,1,0)$.

En ese caso está claro que $Im(f) = \langle f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4) \rangle$ es lo que se busca

Además $Nu(f) = \langle v_1, v_2 \rangle$ pues claramente $\langle v_1, v_2 \rangle \subseteq Nu(f)$.

Veamos que $Nu(f) \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle$:

si $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + k_4 v_4 \in Nu(f)$, entonces

$0 = f(v) = k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) + k_3 f(v_3) + k_4 f(v_4) =$

$= k_3 f(v_3) + k_4 f(v_4) \Rightarrow k_3 = k_4 = 0$ por ser $\{f(v_3), f(v_4)\}$ l.i.

luego $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle$, o sea $Nu(f) \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle$

• Finalmente, ¿ existirá $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ t.l. tq $Nu(f) = \langle v_1, v_2 \rangle$ de arriba e $Im(f) = \langle (0,1,1,0) \rangle$?

Uno podría pensar que sí, poniendo $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = 0$, $f(v_3) = (0,1,1,0)$ y $f(v_4) = (0,1,1,0)$, pues así se cumpliría $Im(f) = \langle (0,1,1,0) \rangle$ pero en ese caso $f(v_3 - v_4) = 0$, o sea que se tendría $\langle v_1, v_2, v_3 - v_4 \rangle \subseteq Nu(f)$ y los 3 vectores son l.i.: se destruye la condición sobre el núcleo. Y no hay forma de arreglarlo ya que las dimensiones del núcleo y de la imagen están relacionadas ...

Teorema de la dimensión (para t.l.)

Sea V un K-e.v. de dimensión finita, W un K-e.v. y $f: V \to W$ t.l.
Entonces:

$$\dim_K(V) = \dim_K(Nu(f)) + \dim_K(Im(f))$$

<u>Demostración</u>: Observemos – tendría que haberlo dicho antes – que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(V)$ pues $\mathrm{Im}(f) = \langle f(\mathcal{B}_V) \rangle$.

Vamos a probar esta igualdad construyendo una base de V cuya cantidad de vectores es exactamente la de una base de $\mathrm{Nu}(f)$ + la de una base de $\mathrm{Im}(f)$.

Para ello consideramos:

$\mathcal{B}_{\mathrm{Nu}(f)} = \{u_1, .., u_s\} \subseteq V$, base de $\mathrm{Nu}(f)$

$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(f)} = \{w_1, .., w_r\} \subseteq W$, base de $\mathrm{Im}(f)$ y para cada vector w_i, tomamos un vector $v_i \in V$ / $f(v_i) = w_i$ (existe pues $w_i \in \mathrm{Im}(f)$)

Así obtenemos $\{v_1, .., v_r\} \subseteq V$.

Nuestro objetivo es probar que $\{u_1, .., u_s, v_1, .., v_s\}$ es <u>base</u> de V, y por lo tanto $\dim(V) = s + r = \dim(\mathrm{Nu}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$.

- Probemos que $\{u_1, .., u_s, v_1, .., v_s\}$ genera V:

  Sea $v \in V$. Entonces $f(v) \in \mathrm{Im}(f)$: $\exists\, k_1, .., k_r \in K$ tq

  $f(v) = k_1 w_1 + .. + k_r w_r = k_1 f(v_1) + .. + k_r f(v_r) = f(k_1 v_1 + .. + k_r v_r)$

  $\Rightarrow 0 = f(v) - f(k_1 v_1 + .. + k_r v_r) \Rightarrow v - (k_1 v_1 + .. + k_r v_r) \in \mathrm{Nu}(f)$:

  $\exists\, j_1, .., j_s \in K$: $v - (k_1 v_1 + .. + k_r v_r) = j_1 u_1 + .. + j_s u_s$, i.e

  $v \in \langle u_1, ..., u_s, v_1, .., v_r \rangle$

- Probemos ahora que $\{u_1, .., u_s, v_1, .., v_r\}$ es l.i:

  Sean $j_1, .., j_s, k_1, .., k_r \in K$ tq $j_1 u_1 + .. + j_s u_s + k_1 v_1 + .. + k_r v_r = 0$ (*)

  Luego, aplicando f, queda

  $j_1 f(u_1) + .. + j_s f(u_s) + k_1 f(v_1) + .. + k_r f(v_r) = f(0) = 0$,

  es decir $k_1 w_1 + .. + k_r w_r = 0$, ya que $f(u_i) = 0$ pues $u_i \in \mathrm{Nu}(f)$.

  Esto implica $k_1 = .. = k_r = 0$ pues $\{w_1, .., w_r\}$ <u>base</u>, o sea li.

  Se concluye volviendo a (*): $j_1 u_1 + .. + j_s u_s = 0 \Rightarrow j_1 = .. = j_s = 0$ pues $\{u_1, .., u_s\}$ <u>base</u>, o sea l.i.

$\boxtimes$

<u>Consecuencia inmediata</u>:

Sean V, W K-e.v. de misma dimensión n, y sea $f: V \to W$ t.l.

Entonces f mono $\Leftrightarrow$ f epi $\Leftrightarrow$ f iso

Otra aplicación (el rango de una matriz)

Sea $A \in K^{m\times n}$. Entonces $rg_F(A) = rg_C(A)$.
Y a ese número se lo llama el rango de A, $rg(A)$.

Demostración: Vimos que dada $A \in K^{m\times n}$, podemos definir en forma canónica $f_A: K^n \to K^m$ t.l. por: $f_A(x) = A.x$

Luego $Nu(f_A) = N(A)$ e $Im(f_A) = \langle f(e_1), .., f(e_n)\rangle = \langle \text{columnas}(A)\rangle$

Sabemos que $\dim(N(A)) = n - rg_F(A)$. Por el teo de la dimensión:

$$\dim(K^n) = \underbrace{\dim(Nu(f_A))}_{\dim(N(A))} + \underbrace{\dim(Im(f_A))}_{rg_C(A)} \Rightarrow$$

$$n = n - rg_F(A) + rg_C(A) \Rightarrow rg_F(A) = rg_C(A) \qquad \boxtimes$$

Composición de transformaciones lineales

Conocemos la composición de funciones:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd} \qquad g\circ f(\overbrace{u}^{\in U}) := \underbrace{g(\underbrace{f(u)}_{\in V})}_{\in W}$$

Ejemplos:

① $f: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$: $f(p) = p'$
$g: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ $\quad g(q) = (q(0), q'(0), q''(0))$

Entonces $g\circ f: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$
$g\circ f(p) = g(f(p)) = g(p') = (p'(0), p''(0), p^{(3)}(0))$ es t.l!

② $f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$f_B: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Entonces $f_B\circ f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está dada por BA : $f_B\circ f_A = f_{BA}$ es t.l!

$f_B\circ f_A(x) = f_B(f_A(x)) = f_B(Ax) = B(Ax) = (BA)x = f_{BA}(x)$ ← vale en gral!

Proposición Sean U, V, W K-e.v's y sean $f: U \to V$ y $g: V \to W$ t.l. Entonces $g\circ f: U \to W$ es t.l. también

Demostración

① $g\circ f(u+u') = g(f(u+u')) \underset{f \text{ lineal}}{=} g(f(u)+f(u')) \underset{g \text{ lineal}}{=} g(f(u)) + g(f(u'))$

$= g\circ f(u) + g\circ f(u')$

② $g\circ f(ku) = g(f(ku)) \underset{f \text{ lineal}}{=} g(k f(u)) \underset{g \text{ lineal}}{=} k.g(f(u)) = k\, g\circ f(u)$ ☒

¿Y qué pasa con los isomorfismos? Recordemos que si $f: V \to W$ es una fción biyectiva, existe la función inversa $f^{-1}: W \to V$ definida por

$$f^{-1}(w) := v \iff f(v) = w$$

que satisface $f^{-1}\circ f = id_V$ y $f\circ f^{-1} = id_W$

Proposición Sean V, W K-e.v's, y sea $f: V \to W$ un isomorfismo. Entonces $f^{-1}: W \to V$ también es una transformación lineal (luego un isomorfismo también). Más aún si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V y $f(v_i) = w_i, \forall i$, entonces $\{w_1, \dots, w_n\}$ es base de W y f^{-1} está definida por $f^{-1}(w_i) = v_i$, $\forall i$.

Demostración: Alcanza con probar que f^{-1} es t.l. ya que todo lo demás ya lo sabemos

- $f^{-1}(w+w') \underset{\substack{\exists!\, v / f(v)=w \\ \exists!\, v' / f(v')=w'}}{=} f^{-1}(f(v)+f(v')) \underset{f \text{ tl}}{=} f^{-1}(f(v+v')) = f^{-1}\circ f(v+v')$

$\quad \| \; f^{-1}\circ f = id_V$

$f^{-1}(w) + f^{-1}(w') = \underset{\substack{v = f^{-1}(w) \\ v' = f^{-1}(w')}}{v+v'}$

- $f^{-1}(kw) \underset{\exists!\, v / f(v)=w}{=} f^{-1}(k f(v)) \underset{f \text{ tl}}{=} f^{-1}(f(kv)) = f^{-1}\circ f(kv) = kv = \underset{v = f^{-1}(w)}{k f^{-1}(w)}$ ☒

Un poco (más) de terminología y notación

Sean V, W K-espacios vectoriales

- $Hom_K(V,W) := \{f: V \to W,\ f \text{ transformación lineal}\}$
- Si $f: V \to V$ es una transformación lineal de V en sí mismo, entonces f se llama un endomorfismo de V, y $End_K(V) := \{f: V \to V,\ f \text{ transformación lineal}\}$
- Si más aún, f es un isomorfismo, entonces se llama un automorfismo de V, y $Aut_K(V) := \{f: V \to V,\ f \text{ automorfismo}\}$.

Transformaciones lineales y Matrices

Vimos arriba que si $A \in K^{m\times n}$, se le puede asociar en forma natural (o canónica) una t.l $f_A : K^n \to K^m$ definiendo $f_A(x) = A \cdot x$.

(y sabemos que $f_A(e_i) = A \cdot e_i$ = i-ésima columna de A).

Recíprocamente, si $f: K^n \to K^m$ es una t.l, entonces queda bien definida por sus valores en la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, .., e_n)$: podemos definir la matriz $A_f \in K^{m\times n}$:

$$A_f = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{bmatrix}$$ que satisface $f(x) = A_f \cdot x$, $\forall x \in K^n$

¿Por qué? ¿Cuánto vale $A_f \cdot e_i$?

Luego

$$\begin{array}{ccc} Hom(K^n, K^m) & \longleftrightarrow & K^{m\times n} \\ f & \overset{\phi}{\longmapsto} & A_f \\ f_A & \overset{\psi}{\longleftarrow\!\shortmid} & A \end{array}$$

Y se satisface $\psi \circ \phi(f) = f$, $\forall f \in Hom(K^n, K^m)$ ← pues coinciden en los e_i

$\phi \circ \psi(A) = A$, $\forall A \in K^{m\times n}$ ← pues coinciden las columnas

luego es una biyección!

Esta construcción se puede hacer en general !

Construcción: Sea V un K-e.v de dim n y W un K-e.v de dim m. Fijemos $\mathcal{B} = (v_1, .., v_n)$ una base (ordenada) de V y $\mathcal{B}' = (w_1, .., w_m)$ una base ordenada de W. Entonces

$$\begin{array}{ccc} Hom_K(V, W) & \longleftrightarrow & K^{m\times n} \\ f & \overset{\phi}{\longmapsto} & [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} [f(v_1)]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [f(v_n)]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix} \\ f_{A;\mathcal{B},\mathcal{B}'} & \overset{\psi}{\longleftarrow\!\shortmid} & A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \end{array}$$

donde $f_{A;\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ es la única t.l. $f: V \to W$ que satisface $f(v_j) = a_{1j} w_1 + \cdots + a_{mj} w_j$, $\forall j$.

Se satisface $\psi \circ \phi(f) = f$, $\forall f \in Hom(V, W)$ y $\phi \circ \psi(A) = A$, $\forall A \in K^{m\times n}$

Luego ϕ es biyectiva y $\psi = \phi^{-1}$.

Observación: $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}} = [f(v)]_{\mathcal{B}'}$

lo demostramos la próxima clase ...