Bases y Coordenadas

De ahora en más las bases serán ordenadas y en el caso de e.v de dimensión finita n las notaremos entre paréntesis $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$.

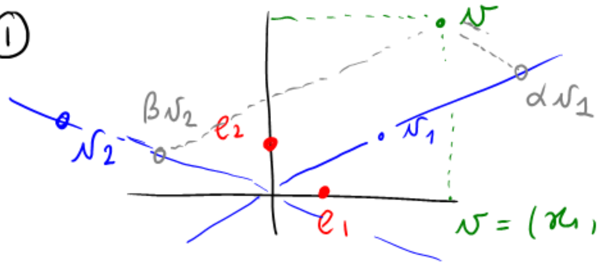
Vimos que si $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ es base del K-e.v. V, entonces dado $v\in V$, $\exists !\ k_1,\dots,k_n\in K\ /\ v=k_1v_1+\dots+k_nv_n$. Luego le podemos asignar a v el juego de coordenadas $(k_1,\dots,k_n)$ que es determinado en forma única por v y a su vez determina en forma única v. Lo notaremos $[v]_{\mathcal{B}}$.

$$[v]_{\mathcal{B}}=(k_1,\dots,k_n) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} v=k_1v_1+\dots+k_nv_n$$

$\boxed{\text{Es una biyección entre } V \text{ y } K^n}$

Ejemplos

1.



$\mathcal{E}=(e_1,e_2)$

$\mathcal{B}=(v_1,v_2)$

$v=(x_1,x_2)=[v]_{\mathcal{E}}$

$v=\alpha v_1+\beta v_2 \Rightarrow [v]_{\mathcal{B}}=(\alpha,\beta)$

2. En $\mathbb{R}^3$, sea $\mathcal{B}=\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ ¿Por qué es base?

- Sea $v=(-1,0,2)$. Entonces $v=-1(1,0,0)-2(1,1,0)+2(1,1,1)$
$\Rightarrow [v]_{\mathcal{B}}=(-1,-2,2)$

Recíprocamente, si $[v]_{\mathcal{B}}=(2,1,0)$, entonces
$v=2(1,0,0)+1(1,1,0)+0(1,1,1)=(3,1,0)=[(3,1,0)]_{\mathcal{E}}$

Convención En K^n si $\mathcal{E}$ es la base canónica, $[v]_{\mathcal{E}}$ se nota v.

- Sea $v=(x,y,z)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$?

$(x,y,z)=\alpha(1,0,0)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,1,1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\alpha+\beta+\gamma \\ y=\beta+\gamma \\ z=\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha=x-(y-z)-z=x-y \\ \beta=y-z \\ \gamma=z \end{array}$$

luego $[(x,y,z)]_{\mathcal{B}}=(x-y,\ y-z,\ z)$

- $[(1,1,1)]_{\mathcal{B}}=(0,0,1)$ pues $(1,1,1)$ es el tercer vector de $\mathcal{B}$.

3. Si V es K-e.v de dim n, y $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ es base de V, entonces $[v_i]_{\mathcal{B}} = e_i$ pues $v_i = 0.v_1 + \dots + 1\, v_i + \dots + 0\, v_n$

4. Sea $V = K_n[X]$ y $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$.

Entonces $[f]_{\mathcal{E}} = (a_0, \dots, a_n)$.

Sea $\mathcal{B} = (1, (X-1), \dots, (X-1)^n)$ base de $K_n[X]$ ¿por qué?

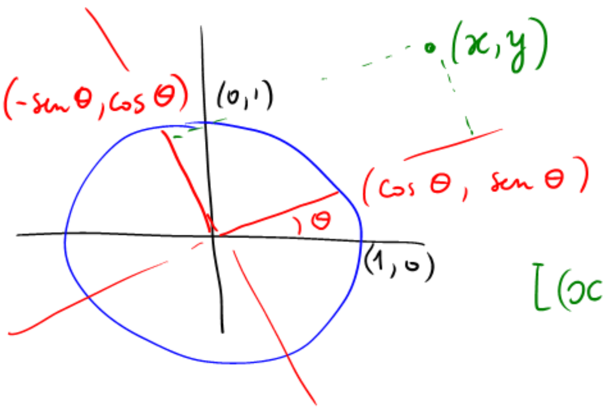
Entonces $[f]_{\mathcal{B}} = \left(f(1), f'(1), \frac{f''(1)}{2}, \dots, \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \right)$

¿por qué? por el desarrollo de Taylor!

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n.$$

5. Sea $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big((\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\big)$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ es un ángulo cualquiera



$$[(x,y)]_{\mathcal{B}} = (x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta, -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$$

(probarlo)

Proposición casi obvia pero importante

Sea V un K-e.v de dim n y $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces

1. $\forall v, w \in V$, se tiene $[v +_V w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} +_{K^n} [w]_{\mathcal{B}}$
2. $\forall v \in V$, $k \in K$, se tiene $[k \cdot_V v]_{\mathcal{B}} = k \cdot_{K^n} [v]_{\mathcal{B}}$

$\boxed{\text{Es una biyección que respeta la suma y el producto x escalar}}$

TRANSFORMACIONES LINEALES

Cuando se tienen 2 conjuntos con una misma estructura, las funciones de uno en otro que importan son las que respetan esa estructura. Aquí la estructura de K-e.v está dada por $+_V$ y $\cdot_V$.

Definición (transformación lineal (t.l.))

Sean V, W K-espacios vectoriales.

f es una transformación lineal de V en W si

$f: V \to W$ es una función que satisface

1. $f(v +_V v') = f(v) +_W f(v')$, $\forall v, v' \in V$
2. $f(k \cdot_V v) = k \cdot_W f(v)$, $\forall v \in V, k \in K$

Consecuencia inmediata:

Si $f: V \to W$ es una t.l, para todo $v_1, .., v_s \in V$, $k_1, .., k_s \in K$, se tiene: $f(k_1 v_1 + .. + k_s v_s) = k_1 f(v_1) + \ldots + k_s f(v_s)$

En particular si $v \in \langle v_1, .., v_s \rangle$, entonces $f(v) \in \langle f(v_1), .., f(v_s) \rangle$

Otra: Si $f: V \to W$ es t.l, entonces $f(0_V) = 0_W$

(pues $0_V = 0 \cdot v \Rightarrow f(0_V) = f(0 \cdot v) = 0 f(v) = 0_W$)

Ejemplos:

1. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $f(\overleftrightarrow{x_1, x_2, x_3}) = (\overleftrightarrow{x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_2})$

Si $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, podemos ver f como

$f(x) = A_f \cdot x$. (Claramente $f(x+y) = A_f(x+y) = A_f x + A_f y = f(x) + f(y)$

y $f(kx) = A_f(kx) = k(A_f x) = k f(x)$)

Estoy mezclando vectores filas y columna pero se entiende: no voy a escribir x^t todo el tiempo...

(2) Sea $A \in K^{m \times n}$. Entonces A define en forma natural una t l. $f_A : K^n \to K^m$ haciendo $f_A(x) = A \cdot x$ (donde x y Ax son vectores columna)

(3) $f : K^{m \times n} \longrightarrow K^{n \times m}$: $f(A) = A^t$

(4) $f : K^{m \times n} \to K^{m \times n}$: $f(A) = PAQ$, con $P \in K^{m \times m}$, $Q \in K^{n \times n}$ dadas

(5) Tomar coordenadas en una base es una t l !

Sea V un K-e.v de dim n, y sea $\mathcal{B}$ una base de V.

Entonces $[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n$
$v \longmapsto [v]_{\mathcal{B}}$ es una t.l.

Ejemplos

(1) ¿$\exists f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ tl $/ f(x+1) = (1,2)$, $f(-x+2) = (0,3)$ y $f(1) = (0,7)$?

No: pues $f(x+1) = (1,2)$ y $f(-x+2) = (0,3)$ fuerza a que

$$f(1) = f\left(\tfrac{1}{3}(x+1) + \tfrac{1}{3}(-x+2)\right) = \tfrac{1}{3} f(x+1) + \tfrac{1}{3} f(-x+2)$$
$$= \tfrac{1}{3}(1,2) + \tfrac{1}{3}(0,3) = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{3}\right) \neq (0,7).$$

¿Y si no se pidiera que fuera transformación lineal?

(2) ¿$\exists f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ tl $/ f(x+1) = (1,2)$, $f(-x+2) = (0,3)$?

Sí: por ejemplo $f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \left(\tfrac{1}{3} a_0 + \tfrac{2}{3} a_1, \tfrac{5}{3} a_0 + \tfrac{1}{3} a_1\right)$.

¿Es única? No: podría haber tomado

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \left(\tfrac{1}{3} a_0 + \tfrac{2}{3} a_1 + a_2, \tfrac{5}{3} a_0 + \tfrac{1}{3} a_1 - 3 a_2\right),$$ o

en general $f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \left(\tfrac{1}{3} a_0 + \tfrac{2}{3} a_1 + b \cdot a_2, \tfrac{5}{3} a_0 + \tfrac{1}{3} a_1 + c \cdot a_2\right)$

donde b y $c \in \mathbb{R}$ pueden ser cualesquiera:

Esa es la t l que además de mandar $x+1$ en $(1,2)$ y $-x+2$ en $(0,3)$ manda x^2 en (b,c).

(3) ¿$\exists f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ tl $/ f(x+1) = (1,2)$, $f(-x+2) = (0,3)$ y $f(x^2) = (-1,1)$?

Sí: por la cuenta de arriba

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \left(\tfrac{1}{3} a_0 + \tfrac{2}{3} a_1 - a_2, \tfrac{5}{3} a_0 + \tfrac{1}{3} a_1 + a_2\right).$$

¿Es única? En este caso sí pues $\{x+1, -x+2, x^2\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.
(Explicar)

Proposición (una t.l. está bien definida sobre una base)

Sean V, W K-espacios vectoriales, con $\dim(V) = n$, y sean $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_n\}$ una base de V, y $w_1, .., w_n \in W$ cualesquiera.
Entonces existe una única t.l. $f : V \to W$ tq $f(v_i) = w_i$, $1 \le i \le n$

Demostración: Vamos a definir la fción f por linealidad usando las coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$, y probar que la fción obtenida es una t.l. luego probaremos que es única.

$\forall v \in V$, $\exists!\ k_1, .., k_n \in K$: $v = k_1 v_1 + .. + k_n v_n$.

Definimos entonces $\boxed{f(v) = f(k_1 v_1 + .. + k_n v_n) = k_1 f(v_1) + .. + k_n f(v_n) = k_1 w_1 + .. + k_n w_n}$.

Tenemos que probar que $f(v+v') = f(v) + f(v')$ y $f(kv) = k f(v)$.
Pero esto se debe a que tomar coordenadas es lineal:
$[v+v']_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} + [v']_{\mathcal{B}}$ y $[kv]_{\mathcal{B}} = k[v]_{\mathcal{B}}$.

Probemos que f es única: es el mismo argumento que está dando vueltas:
si $g(v_i) = w_i$, $1 \le i \le n$, entonces por ser g t.l. obligatoriamente,
$g(k_1 v_1 + .. + k_n v_n) = k_1 g(v_1) + .. + k_n g(v_n) = k_1 w_1 + .. + k_n w_n$
$= f(k_1 v_1 + .. + k_n v_n)$, luego $g = f$ ⊠

Transformaciones lineales y subespacios

Recordemos que si $S \subseteq V$ y $T \subseteq W$,
$f(S) := \{w \in W : \exists\, s \in S \text{ tq } f(s) = w\} \subseteq W$ y $f^{-1}(T) := \{v \in V : f(v) \in T\} \subseteq V$

Proposición (Imagen y preimagen de subespacios)

Sean V, W K-e.v. y sea $f : V \to W$ una t.l.

① Si S es un subespacio de V, entonces $f(S)$ es un subespacio de W, y si T es un subespacio de W, ent. $f^{-1}(T)$ es un subespacio de V.

② En particular, $Im(f) := f(V)$ es un subespacio de W, y $Nu(f) := f^{-1}(\{0_W\}) = \{v \in V : f(v) = 0\}$ es un subespacio de V.

Demostración (Solo de ①, ② es obvio a partir de ①: ¿por qué?)

- $0_W \in f(S)$ pues $0_W = f(0_V)$
- $w, w' \in f(S) \Rightarrow \exists\, v, v' \in V$:
  $w = f(v)$ y $w' = f(v') \Rightarrow$
  $w + w' = f(v) + f(v') = f(\underbrace{v+v'}_{\in V})$
  $\Rightarrow w + w' \in f(S)$
- $w \in f(S)$ y $k \in K \Rightarrow kw \in f(S)$: hacerlo

- $0_V \in f^{-1}(T)$ pues $f(0_V) = 0_W \in T$
- $v, v' \in f^{-1}(T) \Rightarrow v + v' \in f^{-1}(T)$: hacerlo
- $v \in f^{-1}(T) \Rightarrow f(v) \in T \Rightarrow \forall k \in K$,
  $k.f(v) \in T \Rightarrow f(kv) \in T \Rightarrow$
  $kv \in f^{-1}(T)$ ⊠

Ejemplo

1. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$Nu(f) = N(A) = \langle (-1, 2, 1) \rangle$ Recta en $\mathbb{R}^3$

$Im(f) = ?$

Obs: $\left.\begin{array}{l} f(1,0,0) \in Im(f) \Rightarrow (1,2) \in Im(f) \\ f(0,1,0) \in Im(f) \Rightarrow (1,1) \in Im(f) \end{array}\right\}$ Im(f) subespacio

$\Rightarrow \langle (1,2), (1,1) \rangle \subseteq Im(f)$, luego $Im(f) = \mathbb{R}^2$.

Proposición Sean V, W K-e.v y $f: V \to W$ t.l.

1. f inyectiva $\iff Nu(f) = \{0_V\}$
2. $S = \langle v_1, .., v_s \rangle \subseteq V \Rightarrow f(S) = \langle f(v_1), .., f(v_s) \rangle \subseteq Im(f)$
3. $Im(f) = \langle f(v_1), .., f(v_s) \rangle$, $\forall \{v_1, .., v_s\}$ s.g. de V

   En particular, f es sobreyectiva $\iff$
   $W = \langle f(v_1), .., f(v_s) \rangle$, cualquiera sea $\{v_1, .., v_s\}$ s.g. de V.

Demostración

1. ($\Rightarrow$) f inyectiva $\iff$ todo vector de W tiene a lo sumo 1 antecedente
En particular 0_W tiene a lo sumo 1 antecedente y sabemos que 0_V es antecedente pues $f(0_V) = 0_W$. Luego $Nu(f) = \{0_V\}$.

($\Leftarrow$) Sup $f(v) = f(v')$, q.q.q $v = v'$.

$f(v) = f(v') \Rightarrow f(v) - f(v') = 0 \underset{f \text{ t.l.}}{\Rightarrow} f(v - v') = 0 \underset{Nu(f)=\{0\}}{\Rightarrow} v - v' = 0 \Rightarrow v = v'$.

2. ($\subseteq$) Claramente $\langle f(v_1), .., f(v_s) \rangle \subseteq Im(f)$ pues $f(v_i) \in Im(f)$, $\forall i$

($\supseteq$) $Im(f) \supseteq \langle f(v_1), .., f(v_s) \rangle$:

$w \in f(S) \Rightarrow \exists v \in S: w = f(v)$, pero $v = k_1 v_1 + .. + k_s v_s$, luego

$f(v) = f(k_1 v_1 + .. + k_s v_s) = k_1 f(v_1) + .. + k_s f(v_s) \in \langle f(v_1), .., f(v_s) \rangle$.

3. Hacerlo. $\boxtimes$

Definición (Monomorfismo - Epimorfismo - Isomorfismo)

Sean V, W K-e.v y $f: V \to W$. Entonces

1. f es monomorfismo (mono) si f es t.l. inyectiva
2. f es epimorfismo (epi) si f es t.l. sobreyectiva
3. f es isomorfismo (iso) si f es t.l. biyectiva

f mono $\iff Nu(f) = \{0\}$

f epi $\iff \langle f(v_1), .., f(v_s) \rangle = W$ para $\langle v_1, .., v_s \rangle = V$.