Ejemplos de subespacios vectoriales (cont.)

A-L-21-8-12 (1)

- Funciones continuas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$

$\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ continua} \}$ es subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
pues la función nula es continua, la suma de 2 fciones cont. es continua y el producto de una fción cont. por un escalar es continua.

- Polinomios de grado $\leq n$:

$K_n[x] = \{ f \in K[x] : f = 0 \text{ ó } gr(f) \leq n \}$ es K-e.v.

- Matrices de Traza nula

$S = \{ A \in K^{m \times n} / tr(A) = 0 \}$ es subespacio de $K^{m \times n}$
pues $tr(\mathbb{0}) = 0$, $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ y $tr(kA) = k\, tr(A)$

- Subespacios triviales de V: $\{0_V\}$ y V

Ejemplo importante de K-subespacio de K^n:
Soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo
Sea $A \in K^{m \times n}$. $\{ x \in K^n : Ax = 0 \}$ es un K-subesp. de K^n
pues $A.0 = 0$, si $x, y \in K^n$ satisfacen $Ax = 0$ y $Ay = 0$, entonces $A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$, y si $k \in K$, entonces $A(kx) = k(Ax) = k\,0 = 0$.
(Veremos que estos son todos los K-subespacios de K^n)

Proposición (intersección de subespacios)
Sea V un K-e.v y sean S, T subespacios de V.
Entonces $S \cap T = \{ v \in V : v \in S \text{ y } v \in T \}$ es un subespacio de V

Demostración: • $0 \in S$ y $0 \in T \Rightarrow 0 \in S \cap T$
• Sean $v, w \in S \cap T$, entonces $v + w \in S \cap T$ pues: $v + w \in S$ por ser S subespacio y $v + w \in T$ por ser T sub.
• Sea $v \in S \cap T$ y $k \in K$, entonces $kv \in S \cap T$ pues $kv \in S$ por ser S subespacio y $kv \in T$ por ser T subespacio.

Combinaciones lineales

Definición (Combinación lineal (c.l.))

- Sea V un K-e.v, y sean $v_1, \dots, v_s \in V$. Se dice que v es **combinación lineal** de $v_1, \dots, v_s$ si existen $k_1, \dots, k_s \in K$ t.q
$$v = k_1 v_1 + \dots + k_s v_s$$
(Observemos que si v es c.l. de $v_1, \dots, v_s$, entonces $v \in V$.)
- El conjunto de c.l. de $v_1, \dots, v_s$ se nota $\langle v_1, \dots, v_s \rangle$:
$$\langle v_1, \dots, v_s \rangle := \{ v \in V : \exists\, k_1, \dots, k_s \in K \text{ tq } v = k_1 v_1 + \dots + k_s v_s \}$$

Importante: $S = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$ es un subespacio de V, se lo llama el subespacio de V generado por $v_1, \dots, v_s$, o también se dice que $v_1, \dots, v_s$ generan a S.
(pues $0 = 0v_1 + \dots + 0v_s \in \langle v_1, \dots, v_s \rangle$, si $v, w \in \langle v_1, \dots, v_s \rangle$ entonces $v + w \in \langle v_1, \dots, v_s \rangle$: $v = k_1 v_1 + \dots + k_s v_s$, $w = k'_1 v_1 + \dots + k'_s v_s \Rightarrow$ $v + w = (k_1 + k'_1) v_1 + \dots + (k_s + k'_s) v_s$, y finalmente si $k \in K$ y $v \in \langle v_1, \dots, v_s \rangle$, entonces $k v \in \langle v_1, \dots, v_s \rangle$: $k v = (k k_1) v_1 + \dots + (k k_s) v_s$)

Observación: Cuando en vez de $\{v_1, \dots, v_s\}$ se considera un conjunto infinito $X \subseteq V$, se dice que w es combinación lineal de $\{v, v \in X\}$ si existen finitos $v_1, \dots, v_s \in X$ y $k_1, \dots, k_s \in K$ tales que $v = k_1 v_1 + \dots + k_s v_s$
(para estar seguros que la suma tiene sentido)
Nuevamente: $\langle X \rangle = \langle v, v \in X \rangle$ es el subespacio de V generado por $X \subseteq V$.

Ejemplos:

- $(1, 3, -1) \in \langle (2, 1, -1), (3, -1, -1) \rangle$ pues $(1,3,-1) = 2(2,1,-1) - (3,-1,-1)$
  $(2, 0, 1) \notin \langle (2,1,-1), (3,-1,-1) \rangle$ pues $\nexists\, k_1, k_2 \in K$ tq
  $(2,0,1) = k_1 (2,1,-1) + k_2 (3,-1,-1)$
- Cuando se resuelve un sistema de ecuaciones lineales homogéneo en K^n por el método de triangulación de Gauss-Jordan, se obtienen las soluciones como el conjunto generado por ciertos vectores (la cantidad de vectores que se obtiene se corresponde con la cantidad de variables libres)

- $v_1, \dots, v_s, 0 \in \langle v_1, \dots, v_s \rangle$
- $V = \langle v, v \in V \rangle$, y si S es un subespacio de V, $S = \langle v, v \in S \rangle$

Definición: Un e.v. V que admite un cjto finito de generadores es finitamente generado (f.g.)

Proposición: Sea V un K-e.v y sea S un subespacio de V. Sean $v_1, \dots, v_m \in V$. Entonces:

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq S \iff v_1, \dots, v_m \in S$$

Demostración:

($\Rightarrow$) obvio pues $v_1, \dots, v_m \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$

($\Leftarrow$) Si $v_1, \dots, v_m \in S$, toda c.l. de $v_1, \dots, v_m$ pertenece a S por ser S subespacio. Luego $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq S$ $\boxtimes$

Proposición (las operaciones elementales de vectores preservan c.l.)

Sea V un K-e.v y sean $v_1, \dots, v_m \in V$. Entonces

- $\langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_m \rangle$
- $\langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_j \rangle = \langle v_1, \dots, \mu v_i, \dots, v_j \rangle$, $\forall \mu \neq 0$
- $\langle v_1, \dots, v_i, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_m \rangle$, $\forall \lambda \in K, j \neq i$. $\boxtimes$

Sabemos que la unión de subespacios no tiene por qué ser un subespacio (¿cuándo lo es?). El siguiente es el menor subesp. (en el sentido de la inclusión) que contiene a la unión.

Definición (subespacio suma)

Sea V un K-e.v y sean S, T subespacios de V. Entonces la **suma** de S y T es:

$$S+T := \{ v \in V : \exists s \in S, t \in T \text{ tq } v = s+t \}$$

- * $S+T$ es un subespacio de V
- * $S+T$ es el "menor" subespacio que contiene a S y a T, es decir el menor subespacio que contiene a $S \cup T$.
- * $S+T = \langle S \cup T \rangle$
- * Si $S = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$, $T = \langle w_1, \dots, w_t \rangle$, entonces

$$S+T = \langle v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t \rangle$$

• Independencia lineal

A veces cuando se genera un subespacio, "sobran" vectores:
Vimos que $(1,3,-1) \in \langle (2,1,-1),(3,-1,-1) \rangle$. Luego
$\langle \cancel{(1,3,-1)}, (2,1,-1), (3,-1,-1) \rangle = \langle (2,1,-1), (3,-1,-1) \rangle$

Esta idea de "sobrar" o "ser todos indispensables" la da el concepto de **dependencia** o **independencia lineal**.

Definición - Proposición (Dependencia lineal)

Sea V un K-e.v y sean $v_1, .., v_r \in V$. Son equivalentes:

① Existe v_i que es combinación lineal de los demás vectores
$(\exists i: \; v_i \in \langle v_1, .., \check{v}_i, ..., v_r \rangle$

② Existe i tq $\langle v_1, .., v_r \rangle = \langle v_1, .., \check{v}_i, ..., v_r \rangle$

③ $\exists k_1, .., k_r \in K$ no todos nulos tq $k_1 v_1 + \ldots + k_r v_r = 0_V$.

En ese caso, $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un conjunto linealmente dependiente **(l.d.)**

Demostración:
$(1 \Rightarrow 2)$ Si $v_i \in \langle v_1, .., \check{v}_i, .., v_r \rangle$, ent $\langle v_1, .., v_r \rangle \subseteq \langle v_1, .., \check{v}_i, .., v_r \rangle$ pues cada generador de la izquierda pertenece al cjto de la derecha.
La otra inclusión es obvia

$(2 \Rightarrow 3)$ Si $\langle v_1, .., v_r \rangle = \langle v_1, .., \check{v}_i, .., v_r \rangle$, esto significa que $\exists k'_1, .., k'_r$ tq
$v_i = k'_1 v_1 + \ldots + k'_{i-1} v_{i-1} + k'_{i+1} v_{i+1} + \ldots + k_r v_r$, o sea
$-k'_1 v_1 - \ldots - k'_{i-1} v_{i-1} + \underbrace{1}_{k_i \neq 0} v_i - k'_{i+1} v_{i+1} - \ldots - k_r v_r = 0$

$(3 \Rightarrow 1)$ Sup $k_i \neq 0$, luego $\quad v_i = -\frac{k_1}{k_i} v_1 - \ldots - \frac{k_{i-1}}{k_i} v_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i} v_{i+1} - \ldots - \frac{k_r}{k_i} v_r$

i.e $v_i \in \langle v_1, .., \check{v}_i, .., v_r \rangle$ y $\langle v_1, .., v_r \rangle = \langle v_1, .., \check{v}_i, .., v_r \rangle$ ⊠

Definición - Proposición (Independencia lineal)

Sea V un K-e.v y sean $v_1, .., v_r \in V$. Son equivalentes:

① Ningún v_i es combinación lineal de los demás vectores
$(\forall i: \; v_i \notin \langle v_1, .., \check{v}_i, ..., v_r \rangle$

② $\forall i, \; \langle v_1, ..., \check{v}_i, ..., v_r \rangle \subsetneq \langle v_1, ..., v_r \rangle$

③ la única combinación lineal $k_1 v_1 + .. + k_r v_r = 0$ es con $k_1 = \ldots = k_r = 0$

Dicho de otra forma: $k_1 v_1 + .. + k_r v_r = 0 \implies k_1 = \ldots = k_r = 0$

En ese caso, $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un conjunto linealmente independiente **(l.i.)**

⊠

Ejemplos:

- $\{(1,3,-1),(2,1,-1),(3,-1,-1)\} \subseteq K^3$ es un cjto $l.d.$
- $0 \in \{v_1,\dots,v_r\} \Longrightarrow \{v_1,\dots,v_r\}$ $l.d.$
- $\operatorname{sen} x, \cos x \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ son $l.i$ pues

  $\alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \Longrightarrow \alpha \operatorname{sen} 0 + \beta \cos 0 = 0,$ i.e. $\beta = 0$, y $\alpha \operatorname{sen} \pi/2 + \beta \cos \pi/2 = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ también.
- vectores no nulos en K^n en forma escalonada son $l.i$:

  $\{\underbrace{(1,2,3,0,1)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,2,-1,0)}_{v_2}, \underbrace{(0,0,0,1,3)}_{v_3}\}$: 

  $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \underset{1^{er}\text{coord}}{\Longrightarrow} \alpha = 0 \Longrightarrow \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \underset{2\text{da coord}}{\Longrightarrow} \beta = 0$
  $\Longrightarrow \gamma v_3 = 0 \Longrightarrow \gamma = 0$ $\boxtimes$

Proposición (las operaciones elementales de vectores preservan d/i.l.)

Sea V un K-e.v y sean $v_1,\dots,v_m \in V$. Entonces

- $\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_m\}$ es ld (resp. li) $\Longleftrightarrow$ $\{v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_m\}$ es $l.d$ (resp. li)
- $\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_m\}$ es ld (resp li) $\Longleftrightarrow$ $\{v_1,\dots,\mu v_i,\dots,v_m\}$ es ld (resp li), $\forall \mu \neq 0$
- $\{v_1,\dots,v_i,\dots,v_m\}$ es ld (resp $l.i$) $\Longleftrightarrow$ $\{v_1,\dots,v_i+\lambda v_j,\dots,v_m\}$ es ld (resp $l.i$), $\forall \lambda \in K$, $\forall j \neq i$.

Ejemplo: • $\{(1,0,2,1,0),(-1,1,1,0,1),(0,1,3,2,1)\}$ ¿li o ld?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2+F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3-F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• $\{(2,1,7,6,1),(-1,1,1,0,1),(0,1,3,2,1)\}$ ¿li o ld?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 7 & 6 & 1 & v_1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & v_3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & v_2 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & v_3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to -F_2]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -v_2 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & v_3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 \to F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -v_2 \\ 0 & 3 & 9 & 6 & 3 & v_1+2v_2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & v_3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -v_2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & v_3 \\ 0 & 3 & 9 & 6 & 3 & v_1+2v_2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3-3F_1]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -v_2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1+2v_2-3v_3 \end{array}\right):$$ Los vectores son $l.d.$

$v_1+2v_2-3v_3 = 0$ y más aún: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle (1,-1,-1,0,-1),(0,1,3,2,1) \rangle.$

Observación: Cuando en vez de $\{v_1, .., v_r\}$ se considera un conjunto infinito $X \subseteq V$, se dice que X es un conjunto linealmente dependiente cuando existe en X algún subconjunto finito de vectores linealmente dependiente, y que X es un conjunto linealmente independiente cuando todo subconjunto finito de X lo es.

BASES

Definición - Proposición (base)

Sea V un K-e.v y sean $v_1, \dots, v_n \in V$. Son equivalentes

① $\forall v \in V$, $\exists k_1, \dots, k_n \in K$ tq $v = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$ (i.e. $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$) y además $k_1, \dots, k_n$ son únicos.

② $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto de generadores de V que es linealmente independiente

En ese caso, se dice que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una **base** de V.

Demostración

($\Longrightarrow$) Está claro que $\{v_1, .., v_n\}$ genera V. Qpq es un cjto l.i. Planteamos entonces $k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0$ y queremos probar que entonces obligatoriamente $k_1 = \dots = k_n = 0$. Pero sabemos que $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$ y también sabemos que hay una única elección de $k_1, .., k_n$ tq $k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0$. Luego esos deben ser $k_1 = 0, .., k_n = 0$ como se quería probar.

($\Longleftarrow$) Está claro que $\forall v \in V$, $\exists k_1, .., k_n \in K$ tq $v = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$ por ser $\{v_1, .., v_n\}$ cjto generador de V. Qpq esos k_i son únicos $\forall v$. Supongamos entonces que $v = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = k'_1 v_1 + \dots + k'_n v_n$. Entonces, restando,

$0 = (k_1 - k'_1) v_1 + \dots + (k_n - k'_n) v_n$. Pero $\{v_1, .., v_n\}$ l.i implica que entonces es que $k_1 - k'_1 = 0, \dots, k_n - k'_n = 0$, es decir $k_1 = k'_1, \dots, k_n = k'_n$ como se quería probar $\boxtimes$

Observación: Para un conjunto infinito $X \subseteq V$, la definición es exactamente la misma para lo que se llama una base algebraica o base de Hamel de V (por Georg Hamel, matemático alemán, 1877-1954). Ojo que todo vector de V se tiene que escribir como suma finita de vectores de X (en forma única).

Ejemplos:

① $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de K^n $\left(e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \right)$

$X = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

② $\{E^{ij},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ es la base canónica de $K^{m \times n}$ $\left(E^{ij} = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} \right)$

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} E^{ij}$

③ $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ es la base canónica de $K[X]$

$\{1, x, \dots, x^n\}$ es la base canónica de $K_n[X]$

$f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$.

④ $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ no es base de $K^{\mathbb{N}}$ (con $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$).

¿Por qué? ¿De quién es base $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$?

⑤ Cuando se resuelve un sistema lineal homogeneo $AX = 0$ por el método de triangulación de Gauss-Jordan, lo que se obtiene es una base del subespacio de soluciones.
¿Por qué?

⑥ $\{1, i\}$ es base de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-e.v pues $\forall z \in \mathbb{C}, \exists a, b \in \mathbb{R}$:
$z = a.1 + b.i$, o sea $\mathbb{C} = \langle 1, i \rangle_{\mathbb{R}}$, y además
$a + bi = 0 \Rightarrow a = b = 0$, o sea $\{1, i\}$ es l.i.
O equivalentemente, $\forall z \in \mathbb{C}, \exists!\, a, b \in \mathbb{R} : z = a + bi$.