Triangulación de Gauss-Jordan

Dado un sistema lineal $Ax = b$, se lo puede llevar a un sistema equivalente $\tilde{A}x = \tilde{b}$ en forma escalón reducida realizando una cantidad finita de operaciones elementales $F_i \leftrightarrow F_j$, $F_i \to \mu F_i$ $(\mu \neq 0)$ y $F_i \to F_i + \lambda F_j$ sobre la matriz $[A|b]$.

Comentarios

- la forma escalón reducida correspondiente a $[A|b]$ es única
- la cantidad de cuentas en K que se hacen para llegar a la forma escalón reducida para una matriz cuadrada $A \in K^{n\times n}$ es del orden de n^3.

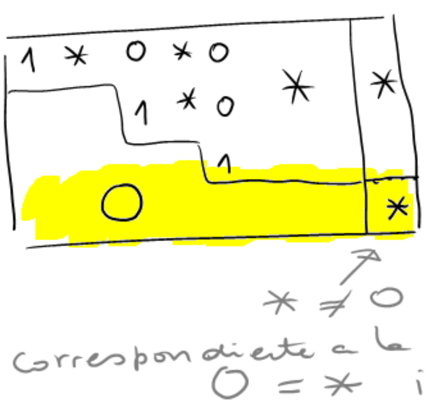
• Sistemas compatibles y sistemas incompatibles

Definición: Un sistema lineal es **compatible** cuando tiene solución e **incompatible** cuando no tiene ninguna solución.
Cuando es compatible, puede tener una única solución (en cuyo caso se lo llama compatible **determinado**), o más de una solución (compatible **indeterminado**).

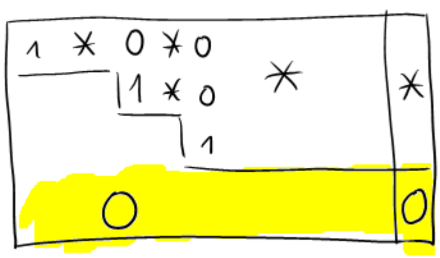
Observaciones:

- A nivel de la matriz escalón reducida, eso se lee en:

incompatible:

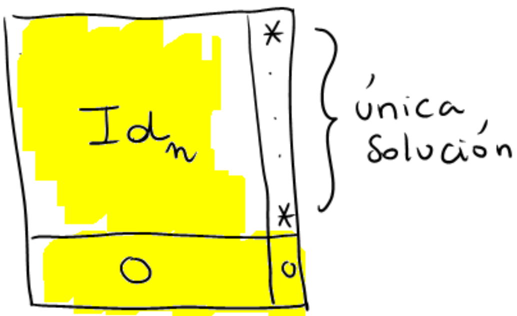


compatible:

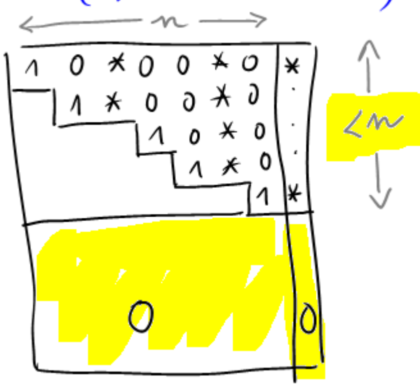


- Cuando el sistema es compatible: la cantidad (#) de variables ligadas es igual a la cantidad de filas no nulas de la matriz escalón reducida (pues por cada una de esas filas hay un primer 1 que se corresponde con una variable que se despeja en función de las otras). La cantidad de variables libres en un sistema con n incógnitas es $n - \#$ (filas no nulas de la matriz escalón reducida)
- Si el sistema es compatible, es determinado cuando no hay variables libres, es decir cuando la matriz escalón reducida tiene n filas no nulas, y es indeterminado cuando hay variables libres, es decir cuando la matriz escalón reducida tiene $< n$ filas no nulas (En ese caso para $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ hay ∞ soluciones).
- Como A tiene n columnas, eso se lee para la matriz escalón reducida en:

Compatible determinado:
(1 solución)



Compatible indeterminado
(> 1 solución)



- En particular, para un sistema de m ecuaciones con n incógnitas,

$$\text{compatible determinado} \Rightarrow m \geq n$$

- Un sistema **homogéneo** (i.e. cuando $b = 0$) es siempre compatible pues $(x_1, .., x_n) = (0, .., 0)$ siempre es solución. Es compatible determinado $\Leftrightarrow$ 0 es la única solución.

• Cálculo de la inversa:

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$ ¿Es A inversible? Si sí, calcular su inversa

Si planteamos $\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{pmatrix}$ para inversa de A, se observa que resolver

$$A\cdot\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

se descompone en 3 sistemas (con misma matriz A):

① $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ② $A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ③ $A\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Para resolverlos por separado, se realizan siempre las mismas operaciones elementales sobre la matriz A. Así que por qué no resolverlos todos a la vez. Aquí entonces la matriz ampliada es

$$[A\,|\,Id_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{F_2\to F_2-F_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&0&-1&-1&1&0\\0&-1&0&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_2\leftrightarrow F_3]{}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-1&0&-1&0&1\\0&0&-1&-1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[F_3\to -F_3]{F_2\to -F_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow[F_1\to F_1-F_3]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right]\xrightarrow[F_1\to F_1-F_2]{}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&1\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&1&-1&0\end{array}\right]$$

La conclusión es que los tres sistemas originales son compatibles determinados: A es inversible (pues tiene inversa a derecha) y

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

Más aún, se obtuvo la matriz Id_3 al final del proceso de triangulación realizando sobre A una serie de operaciones elementales de filas, que corresponden a multiplicar A por la izquierda por las matrices elementales $T_{21}(-1)$, luego $T_{31}(-1)$, etc.. Es decir

$$\underbrace{T_{12}(-1)\,T_{13}(-1)\,T_3(-1)\,T_2(-1)\,T_{23}\,T_{31}(-1)\,T_{21}(-1)}_{A^{-1} = \text{ producto de matrices elementales}}\,A = Id_3$$

Finalmente observemos que si no hubiéramos obtenido Id_3 al final del proceso de triangulación de Gauss-Jordan, A no sería invertible pues el sistema no sería compatible determinado (A inv $\Rightarrow Ax = b$ es c.d. $\forall b$ pues en ese caso $x = A^{-1}b$)

Concluimos:

Método para determinar si A es invertible (y calcular A^{-1}):

Dada $A \in K^{n\times n}$, triangular por el método de Gauss-Jordan $[A \mid Id_n]$. A es invertible $\Leftrightarrow$ se obtiene $[Id_n \mid B]$.

En ese caso $A^{-1} = B$. Remarcamos que

$$\boxed{A \text{ invertible} \Leftrightarrow \text{la matriz escalón reducida de } A \text{ es } Id_n}$$

Proposición (Matrices invertibles)

Sea $A \in K^{n\times n}$. Son equivalentes:

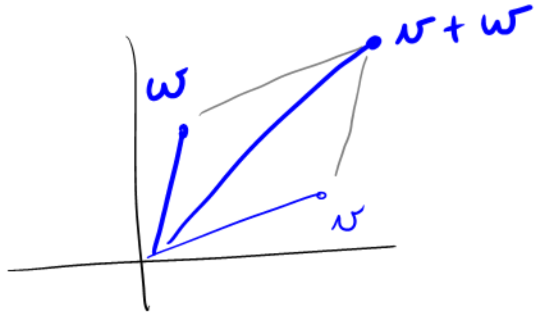
1. $A \in GL(n, K)$
2. El sistema homogeneo $Ax = 0$ tiene al 0 como única solución
3. $\forall b \in K^{n\times 1}$, el sistema $Ax = b$ tiene única solución ($x = A^{-1}b$)
4. $\forall b \in K^{n\times 1}$, el sistema $Ax = b$ tiene al menos una solución

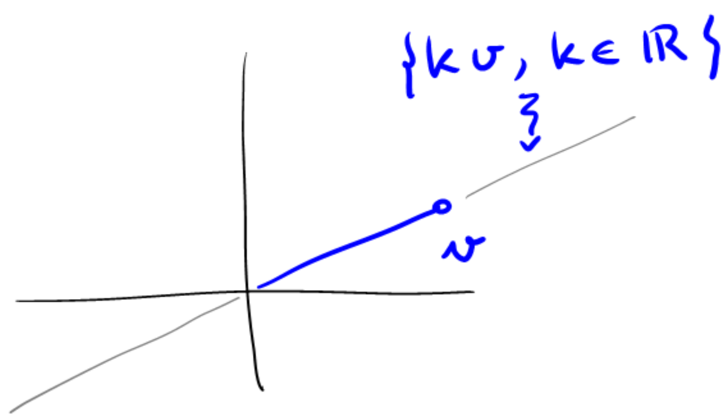
Demostración: 1, 2 y 3 son todos equivalentes a que la matriz escalón reducida de A es Id_n (y por lo tanto son equivalentes entre sí). Además 3 $\Rightarrow$ 4.
Falta probar 4 $\Rightarrow$ 1: $Ax = b$ tiene solución, $\forall b$, implica en particular $Ax = e_i$ tiene solución, $1 \le i \le n$ (donde $e_i = (0, .., 0, 1, 0, \dots, 0)$)
O sea A tiene inversa a derecha, por lo tanto tiene inversa ☒

Ejercicio: $A \in GL(n, K) \Leftrightarrow A$ es producto de matrices eltales.

Espacios vectoriales

$\mathbb{R}^2$:





Definición Sea K un cuerpo. Un conjunto V es un espacio vectorial sobre K (o K-e.v) si tiene dos operaciones:

$+ : V \times V \to K$ tq $(V,+)$ es un grupo abeliano

$\cdot : K \times V \to V$, es decir $\forall k \in K$, $\forall v \in V$ se tiene $k.v \in V$,

que satisface las 4 propiedades siguientes:

escalar — vector — producto por escalares

- $1_K \cdot v = v, \quad \forall v \in V$
- $(k \cdot_K k') \cdot v = k \cdot (k' \cdot v), \quad \forall k, k' \in K, \forall v \in V$
- $k \cdot (v +_V w) = k \cdot v + k \cdot w, \quad \forall k \in K, \forall v, w \in V$
- $(k +_K k') \cdot v = k \cdot v +_V k' \cdot v, \quad \forall k, k' \in K, \forall v \in V.$

Ejemplos

① K^n es un K-e.v con las operaciones usuales:

$+ : (x_1, .., x_n) + (y_1, .., y_n) = (x_1 + y_1, .., x_n + y_n)$

$\cdot : \quad k(x_1, .., x_n) = (kx_1, .., kx_n)$

② $K^{m \times n}$ es un K-e.v con las operaciones vistas:

$+ : \quad (A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \qquad \cdot : (kA)_{ij} = k \cdot A_{ij}$

③ $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-e.v con $z+z'$, kz usuales:

$(a+bi) + (c+di) = ac + bd\,i, \quad k(a+bi) = ka + kb\,i$

Ejemplo esencial (casi todos los e.v. con los que trabajamos son casos particulares o subconjuntos de este)

Sea X un conjunto no vacío y K un cuerpo. Se define el conjunto de funciones de X en K

$$K^X = \{ f : X \to K, \ f \text{ función} \}$$

Y las operaciones siguientes:

$+$: Dados $f, g : X \to K$, $f+g : X \to K$ se define como:

$$(f+g)(x) := f(x) +_K g(x) \quad , \quad \forall x \in X$$

$\cdot$: Dados $k \in K$ y $f : X \to K$, $kf : X \to K$ se define como

$$(k \cdot f)(x) := k \cdot_K f(x) \quad , \quad \forall x \in X.$$

Entonces $(K^X, +, \cdot)$ es un K-espacio vectorial.

Demostración:

- $(K^X, +)$ es un grupo abeliano pues $(K, +)$ lo es.
  El elemento neutro de K^X es la función nula. ¿quién es el opuesto de la función f?
- $1 \cdot f = f$ pues por def. $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$, $\forall x \in X$
- $(kk')f = k(k'f)$ por la asociatividad del producto en K: $\forall x \in X$,
  $((kk')f)(x) = (kk') \cdot f(x) = k(k'f(x)) = k((k'f)(x)) = (k(k'f))(x)$
- $k(f+g) = kf + kg$ por la distributividad en K: $\forall x \in X$,
  $(k(f+g))(x) = k \cdot (f+g)(x) = k \cdot (f(x) + g(x))$
  $= k \cdot f(x) + k \cdot g(x) = (kf)(x) + (kg)(x) = (kf + kg)(x)$
- $(k+k')f = kf + k'f$ se deja como ejercicio. $\boxtimes$

Ejemplos: $\mathbb{I}_n = [\![1, n]\!] = \{1, \dots, n\}$

- $K^n = K^{\mathbb{I}_n}$
- $K^{m \times n} = K^{\mathbb{I}_m \times \mathbb{I}_n}$
- $K^K = \{ f : K \to K, \ f \text{ función} \}$
- $K^{\mathbb{N}} = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \}$ sucesiones.

Subespacios

En general, vamos a trabajar con espacios vectoriales que son subconjuntos de otros espacios vectoriales conocidos, con las mismas operaciones.

Definición: Sea V un K-e.v. Un subconjunto $S \subseteq V$ es un subespacio de V si

(0) $S \neq \emptyset$

(1) $\forall\, s,t \in S$, se tiene $s+t \in S$

(2) $\forall\, k \in K$ y $s \in S$, se tiene $ks \in S$

Esto es equivalente a decir:

S es un subespacio de V si

(0') $0_V \in S$

(1) $\forall\, s,t \in S$, se tiene $s+t \in S$

(2) $\forall\, k \in K$ y $s \in S$, se tiene $ks \in S$

($\Downarrow$) $0 \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$

($\Uparrow$) $S \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, s \in S$
$\Rightarrow 0_K \cdot s = 0_V \in S$

Ejemplos

- Subespacios de $\mathbb{R}^2$

- Polinomios

$$K[x] := \{ f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,\ a_i \in K,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}$$

es un K-espacio vectorial con la suma y el producto por escalares usuales porque es un subespacio de K^K: la función nula es una función polinomial, y la suma y el producto por escalar de polinomios es un polinomio.